Homología de Hochschild para Icis

Dr. Burga Barboza Rubén Esteban.
Profesor Principal. Departamento Académico de Matemática. UNPRG.

Resumen

Sea R un anillo local de un punto P de una variedad suave. Cuando R/I es regular la homología de Hochschild y cíclica es conocida. Nosotros estudiamos el caso cuando el anillo R/I tiene una singularidad aislada e $I = \langle f, g \rangle$ es intersección completa.
Palabra clave: *Icis.*

Abstract

Let R be the local ring of a point P of smooth variety. When R/I is regular the Hochschild and cyclic homology is known. We studied the case in which the ring R/I has a isolated singularity and $I = \langle f, g \rangle$ is complete intersection.
Keywords: *Icis.*

Introducción

En el presente trabajo presentamos un resumen de las principales herramientas que desarrollamos para calcular la homología de Hochschild para $A = R/\langle f, g \rangle$; aquí R es el anillo local de un punto racional regular de un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k de característica cero. Es decir $R = (k[x_1, \ldots, x_s]/I')_\eta$ y $\eta = (x_1 - a_1, \ldots, x_s - a_s)$. El ideal $I = \langle f, g \rangle$ es de tipo intersección completa con una singularidad aislada en (R, η). Este anillo es un caso particular de un anillo regular local esencialmente de tipo finito (r.l.e.t.f). Los cálculos que aquí se obtienen generalizan los resultados de Michler, Hülb, Bach, [12], [7], [4].
Sea A un álgebra de la forma $A = k[x_1, \ldots, x_m]/I$ donde I es un ideal de tipo intersección completa. En [3] se define la homología cíclica y de Hochschild para álgebras diferenciales graduadas. Sea V un espacio vectorial graduado concentrado en grado uno. Identificando el álgebra graduada $\wedge V$ con el módulo graduado del complejo Koszul se proporciona un diferencial a $\wedge V$. Esto convierte a $(\wedge V, d)$ en un álgebra diferencial graduada. Mostrando una versión graduada del teorema de Hochschild Kostant Rosenberg para el álgebra $(\wedge V, d)$ hallan una fórmula explícita, $HH_n(\wedge V, d) = \oplus_{p\geq 0} HH_n^{(p)}$, $HC_n(\wedge V, d) = HC_n(k) \oplus \oplus_{p\geq 0} HC_n^{(p)}$, que cálcula la homología de Hochschild y cíclica de A (ver [3]). En [8] se usa un método similar para hallar una fórmula que calcula la homología cíclica y de Hochschild para álgebras de la forma R/I, donde R es *homológicamente regular* e I es localmente una intersección completa. Estas fórmulas (ver [8, Corolario 3.4]), expresan la homología de Hochschild y cíclica en función de los complejos L_j y D_j para $j > 0$ respectivamente, definidos de la siguiente manera

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j\Omega_R^0}{I^{j+1}\Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1}\Omega_R^1}{I^j\Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \cdots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I\Omega_R^{j-1}}{I^2\Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I\Omega_R^j}$$

y

$$D_j : 0 \longrightarrow \frac{\Omega_R^0}{I^{j+1}\Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^1}{I^j\Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \cdots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^{j-1}}{I^2\Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I\Omega_R^j}$$

Basados en la fórmula de [8, Corolario 3.4] en adelante nos dedicaremos a calcular la cohomología de los complejos L_j.

Homología de Hochschild

En el caso que el ideal I es principal, para el cálculo de los módulos de cohomología de los complejos L_j se usa el siguiente método: Primero se prueba que L_j es quasiisomorfo a $K(f_{x_1}, \cdots, f_{x_m}) \otimes_R R/I$, donde $K(f_{x_1}, \cdots, f_{x_m})$ es el complejo de Koszul de la secuencia $f_{x_1}, \cdots, f_{x_m}$. Si la singularidad de I en η es aislada y (R, η) es r.l.e.t.f, entonces $K(f_{x_1}, \cdots, f_{x_m})$ es una resolución de R/J_f. Aquí J_f es el ideal jacobiano de f, y en general J_F representa el ideal jacobiano de $F = (f_1, \cdots, f_r)$. Esto nos permite describir la cohomología de L_j de la siguiente manera.

Proposición 1. Sea (R, η) un anillo r.l.e.t.f, $I = \langle f \rangle$ un ideal con una singularidad aislada en η entonces

$$H^*(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } * \neq \text{m,m-1} \\ \frac{(J_f : f)}{J_f} & \text{si } *=\text{m-1} \\ \frac{R}{\langle f, J_f \rangle} & \text{si } *=\text{m} \end{cases} \tag{1}$$

para $j \geq m = dimR$.

Prueba. Ver [7] para el caso de polinomios y [9] en general.

Nosotros generalizamos estos cálculos al caso en que $I = \langle f, g \rangle$ sea una intersección completa. La generalización natural directa de las fórmulas anteriores al caso de dos polinomios sería

$$H^*(L_m) = Tor_{m-*}(R/\langle f, g \rangle, R/\langle J_f, J_g \rangle).$$

Sin embargo, esta nueva fórmula no se cumple en general, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sea $f = x^2 + y^2 + z^2$ y $g = xy + z^2$ en $(R, \eta) = (k[x, y, z]_{(x,y,z)}, \eta)$. Se prueba que f, g forman una secuencia regular. Un cálculo muestra que el ideal $I = \langle f, g \rangle$ tiene una singularidad aislada de intersección completa en η. Más aún f y g tienen una singularidad aislada en η. Esto a su vez equivale a tener que los complejos $K(f_{x_1}, \ldots, f_{x_m})$ y $K(g_{x_1}, \ldots, g_{x_m})$, tienen cohomología cero para todo $i \neq m$, donde $df = \sum_{i=1}^m f_{x_1} dx_i$ y $dg = \sum_{i=1}^m g_{x_i} dx_i$. De la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K(f_{x_1}, \ldots, f_{x_m}) \otimes_R R/I \longrightarrow L_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0,$$

Como f tiene una singularidad aislada entonces

$$H^*(K(f_{x_1}, \ldots, f_{x_m}) \otimes R/I) = Tor_{m-*}\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_{f,g}}\right).$$

En la secuencia exacta larga se prueba que $\delta_0 = 0$ y $\delta_1 = 0$. De aquí tenemos la secuencia

$$0 \longrightarrow Tor_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) \longrightarrow H^{m-1}(L_m) \longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df\wedge\overline{\Omega}^{m-2}+dg\wedge\overline{\Omega}^{m-2}} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Se prueba que $dim(Tor_1(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f})) = 2$ y que $\frac{\Omega^{m-1}}{df\wedge\Omega^{m-2}+dg\wedge\Omega^{m-2}} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}}$.

Notemos que, $\frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df\wedge\overline{\Omega}^{m-2}+dg\wedge\overline{\Omega}^{m-2}} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}} \otimes_R \frac{R}{I} \neq 0$ por que si no $M = \frac{J_f}{J_{f,g}}$ cumpliría que $\frac{M}{IM} = 0$ y por el Lema de Nakayama se tendría $M = 0$. Pero $J_f = \eta$ y $J_{f,g} \subset \eta^2$ nos dice que $M \neq 0$. Por (2), $\dim(H^{m-1}(L_m)) > 2$ y no puede ser isomorfo a

$$Tor_1(R/I, R/\langle J_f, J_g\rangle) = Tor_1(R/I, R/J_f).$$

Esto finaliza el Ejemplo 2.2.

Observación 1.

La Proposición 1 se obtuvo gracias al hecho que $ht(J_f) = dim(R) = m$. En el caso que $I = \langle f, g\rangle$ se tiene que $ht(J_F) = m-1$. Cuando el ideal I es generado por una secuencia regular de r elementos obtenemos que $ht(J_F) = m - r + 1$ (ver [2]). Esta es la principal obstrucción para seguir el método empleado para el caso de un solo polinomio. Sin embargo el cálculo de la altura del ideal jacobiano nos permite brindar información sobre los ideales de tipo intersección completa con una singularidad aislada (icis por sus siglas en inglés). Estas propiedades permitirán calcular la homología de Hochschild. Estos resultados se presentan de manera detallada en [2]. A continuación describimos los resultados obtenidos sobre la cohomología de los complejos L_j y L'_j.

Para el caso en que el ideal esté generado por una secuencia regular de longitud dos, $I = \langle f, g\rangle$, obtenemos :

Proposición 2. Los complejos L'_j cumplen que $H^i(L'_j) = 0$ para todo $i \neq j$ e $i < m - 1$.

Prueba. Se sigue de [2, Teorema 2.47]) y el Corolario 1.4.14 de [6].

El significado de esta afirmación se refleja en el siguiente teorema.

Resultados y Discusión

Teorema 1. *Sea $j \in \mathbb{N}$ entonces*

$$H^i(L_j) = \begin{cases} 0 & si\ i < min\{j, m-2\}. \\ \dfrac{df\wedge\Omega^j}{df\wedge dg\wedge\Omega^{j-1}} \otimes R/I & si\ i = j\ y\ j \leq m. \\ Tor_{m-1-i}(\dfrac{J_f}{J_{f,g}}, R/I) & si\ j = m-1. \\ Tor_1(H^{m-1}(C_{p+1}), R/I) & si\ j > m-1\ e\ i = m-2, \end{cases} \tag{3}$$

donde $C_{p+1} = (L'_{m+p})^{\leq m-1}$ y f tiene una singularidad aislada. Para los términos en nivel

$m-1$ y m presentamos una secuencia espectral

$$
\begin{tikzcd}
E^1_{2,0} = Tor_2(M_p, \frac{R}{I}) & \\
E^1_{1,0} = Tor_1(M_p, \frac{R}{I}) & E^1_{1,1} = Tor_1(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}) \arrow[l, "d^1"'] \\
E^1_{0,0} = Tor_0(M_p, \frac{R}{I})) & E^1_{0,1} = Tor_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}), \arrow[l, "d^1"']
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

donde $Gr(M_p) = \oplus_{i=0}^{p} R/J_f$ y d^1 es el producto exterior con dg.

Prueba. Para todo primo P en $(R/I, \overline{\eta})$ diferente del ideal maximal se prueba que $H^i((L_j)_P) = 0$ para todo $i \neq j$ (ver [2, Teorema 2.48]). De esta propiedad y de [6, Corolario 1.4.14] se desprende que $H^i(L_j) = 0$ para todo $i < m-1$ e $i \neq j$. La segunda igualdad de (3) se sigue del hecho que f tiene una singularidad aislada. De la Proposición 2 obtenemos que $H^i(L'_{m-1}) = 0$ para todo $i < m-1$. Es decir L'_{m-1} es una resolución de $H^{m-1}(L'_{m-1}) \simeq J_f/J_{f,g}$. Como $L_{m-1} = L'_{m-1} \otimes R/I$ entonces

$$H^i(L_{m-1}) = Tor_{m-1-i}(R/I, J_f/J_{f,g}).$$

La última afirmación de (3) se demuestra de manera similar. La secuencia espectral se obtiene al escribir L_{m+p} de la siguiente manera

$$
\begin{tikzcd}
L_{m+p}: & \vdots \arrow[d, "df"] & & & & \\
& \overline{\Omega}^{m-1}_{1,p+1} \arrow[d, "df"] & \dots \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] & \dots \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] & & \\
& \overline{\Omega}^{m}_{0,p} & \overline{\Omega}^{m-1}_{1,p} \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] & \ddots \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] & \dots \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] & \\
& & \ddots & \overline{\Omega}^{m-1}_{1,1} \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] & \overline{\Omega}^{m-2}_{2,1} \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] & \dots \arrow[l, "dg"] \arrow[d, "df"] \\
& & & \overline{\Omega}^{m}_{0,0} & \overline{\Omega}^{m-1}_{1,0} \arrow[l, "dg"] & \dots, \arrow[l, "dg"]
\end{tikzcd}
\tag{5}
$$

donde $\overline{\Omega}^i_{*,*} = \Omega^i_{*,*} \otimes R/I$. Como $L_{m+p} = L'_{m+p} \otimes R/I$, el complejo L'_{m+p} se escribe, como un bicomplejo, de manera similar. La filtración por columnas nos proporcionan la secuencia espectral (4).

En el caso que J_g este contenido en el ideal J_f, se tiene el siguiente resultado.

Corolario 3. Si $J_g \subset J_f$ entonces la secuencia espectral del Teorema 1 cumple que $E^1 = E^\infty$.

Prueba. Se prueba que los morfismo confección de la secuencia exacta de cohomología de

$$0 \longrightarrow E_p \longrightarrow L_{m+p} \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0$$

son nulos. Es decir $d^1 = 0$.

Aunque la condición $J_g \subset J_f$ simplifica significativamente los cálculos, esta se da en muchos ejemplos conocidos. Ello nos permite calcular los módulos de cohomología de los complejos L_{m+p} para el caso en que R/I es de dimensión cero y la singularidad es simple, a excepción de H_μ para $\mu \geq 7$, y **las singularidades simples de curvas inmersas en dimensión tres** (ver [2, Ejemplo 2.67]). El cálculo de estos grupos de cohomología fue una de las motivaciones originales de este trabajo.

Conclusión

Existe una secuencia expectral $E^n_{p,q}$ tal que :

1) Se cumple $E^2 = E^\infty$

2) Si $J_g \subset J_f$ entonces $E^1 = E^\infty$

Referencias

[1] Avramov, L.L.; Vigué-Poirrier, *Hochschild Homology criteria for smothness*, Internat. Math. Res. Notices 2 [in Duke Math. J. 65 nº 2] (1992), 17-25.

[2] Burga, R.; *Homología Cíclica y de Hochschild para Intersección Completa con singularidades Aisladas* , Tesis de doctorado IMCA, Perú 2009, http: mate.dm.uba.ar/gcorti/

[3] Burghelea, D. ; Vigué-Poirrier, M., *Cyclic Homology of commutative algebra I*, Algebraic Topology Rational Homotopy, Louvain-la Neuve, 1986- , Lectures Notes in Math. 1318, Springer Verlag, 1988.

[4] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *Cyclic Homology of Hypersurface*, J. Pure and App. Algabra, $83, 205 - 218$.

[5] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *A Hochschild homology criterium for smoothness of an algebra*, Commentarii Mathematici Helvetici, v.69, p.163 - 168, 1994.

[6] Bruns, W.; Herzog, J. ; *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press 1996.

[7] Brüderle, S., Kunz E., *Divided Powers and Hochschild Homology of Complete Intersections.*, Math. Ann 299, 57-76, (1994).

[8] Cortiñas, G., Guccionne, J.A., Guccionne J.J., *Decomposition of Hochschild and Cyclic homology of Commutative Differential graded Algebra,* J. Pure and App. Algebra, $83, 219-235, 1992$.

[9] Mayorquín León, *K-teoría y homología cíclica de hipersuperficies,* Tesis de Doctorado, Universidad de la Laguna, España 2007, http://mate.dm.uba.ar/gcorti/.

[10] Loday J.L., Quillen D., Cyclic homology and the lie algebra of matrices. Comment. Math. Helv. Vol 59, (1984), p. 565-591.

[11] Looijenga E., *Isolated Singular Points on Complete Intersections,* Cambridge University Press, 1984.

[12] Michler, R., *Torsion of diferentials of hypersurfaces with isolated singularities,* J. Pure and App. Algebra,