

# Transformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones

Wilmer Fernando Chininin Cruz  
Lic. en Matemáticas, UNPRG.

## Resumen:

*En este artículo se soluciona la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon y se analiza su solución. La metodología consiste en utilizar la transformación de Bäcklund para encontrar una nueva solución no nula. La solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon tiene correspondencia con la pseudoesfera y además tiene el comportamiento de un solitón. Para encontrar nuevas soluciones de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon se pueden utilizar herramientas de la geometría diferencial.*

**Palabras clave:** Ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon, transformación de Bäcklund, pseudoesfera, solitón.

## Abstract:

*In this article the Sine-Gordon partial differential equation is solved and this solution is analyzed. The methodology is to use the Bäcklund Transformation to find a new nonzero solution. The solution of partial differential equation Sine-Gordon has correspondence with the pseudosphere and also has the behavior of a soliton. To find new solutions of partial differential Sine-Gordon equation can be used tools of differential geometry.*

**Key words:** Sine-Gordon partial differential equation, Bäcklund Transformation, pseudosphere, soliton.

## Introducción

Una de las ecuaciones diferenciales parciales que es difícil de resolver es la *ecuación de Sine-Gordon* que modela un fenómeno de la naturaleza donde  $\theta = \theta(x, t)$  representa un campo y está dada por:

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = -K \sin \theta \cos \theta,$$

donde  $K$  indica la curvatura Gaussiana,  $\theta_{xx}$  y  $\theta_{tt}$  indican las derivadas parciales con respecto al espacio y al tiempo. Esta ecuación se convierte en la *ecuación de la onda* si el lado derecho es cero ( $K = 0$ ), por eso se llama *ecuación de la onda no lineal*.

La *ecuación de Sine-Gordon* tiene grandes aplicaciones en la física del estado sólido, óptica no lineal, entre otras. Su importancia radica en que tiene soluciones denominadas *solitones*.

Los solitones fueron observados por primera vez en el año de 1834 cuando un ingeniero naval Scott Russell paseaba por el canal de Edimburgo (Inglaterra) y observó que al detenerse de golpe un barco, se desprendió una gran onda de agua que avanzó varios kilómetros sin cambiar su forma. A este fenómeno lo llamó *gran onda de traslación*, la cual no llegó a modelar a pesar de mucho esfuerzo.

Tuvieron que pasar más de 60 años para que los holandeses D.J. Korteweg y G. de Vries formularan un modelo matemático que diera explicación al fenómeno observado por Scott Russell.

En 1955 Fermi, Pasta y Ulam encontraron una relación entre la *ecuación de Korteweg-Vries* dada por

$$\theta_t = \frac{1}{4}\theta_{xxx} - \frac{3}{2}\theta\theta_x$$

y el extraño comportamiento de los sistemas, originalmente lineales, en el cual fueron introducidas perturbaciones no lineales. Al darse cuenta que las ondas de la ecuación de Korteweg-Vries no se dispersan y conservan sus características iniciales después de chocar, los científicos Zabusky y Kruskal llamaron tales ondas *solitones*. (Cuenda, 2007)

El objetivo principal es encontrar una solución no nula de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon usando la Transformación de Bäcklund y verificar si tiene el comportamiento de solitón; además de establecer una relación entre la solución de la ecuación diferencial parcial con la pseudoesfera.

## Materiales y métodos

**Teorema 1.** Sean  $E, F, G, e, f, g$  funciones reales diferenciables definidas en un abierto conexo  $U \subset \mathbb{R}^2$ , tales que  $E > 0, G > 0, EG - F^2 > 0$ . Si las funciones satisfacen las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi, entonces

1. Existe una superficie parametrizada regular  $r : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que las funciones  $E, F, G$  son los coeficientes de la primera forma fundamental y  $e, f, g$  son los coeficientes de la segunda forma fundamental.
2. Si  $r$  y  $\bar{r}$  son dos superficies que satisfacen el ítem anterior entonces, existe un movimiento rígido  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\bar{r} = F \circ r$ . (Avendaño, 2006).

**Definición 0.1.** Una solución onda solitaria de una ecuación en derivadas parciales

$$F(x, t, \theta) = 0$$

donde  $x, t \in \mathbb{R}$  es la variable espacial y temporal respectivamente y  $\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la variable dependiente, es una solución de onda viajera de la forma:

$$\theta(x, t) = \phi(x - \gamma t) = \phi(z)$$

para alguna velocidad  $\gamma$ , y cuya transición ocurre desde un estado asintótico constante, cuando  $z \rightarrow -\infty$ , hasta otro estado asintótico constante cuando  $z \rightarrow +\infty$ . (González, 2001).

**Definición 0.2.** Un solitón es una onda solitaria que preserva asintóticamente su forma y su velocidad bajo interacciones no lineales con otras ondas solitarias, o de manera más general, con otra perturbación localizada arbitrariamente. (González, 2001).

Se puede decir que el término “solitón” se asocia con la solución de una ecuación diferencial parcial no lineal o un sistema de ellas que tiene 3 características:

1. Representa una onda cuya forma no varía con el tiempo.
2. Está localizada, de manera que decae o se aproxima a un valor constante en el infinito.
3. Puede interactuar fuertemente con otros solitones y mantener su forma y su velocidad, salvo una traslación espacial. (Cuenda, 2007).

**Definición 0.3.** Sea  $S$  una superficie regular bidimensional parametrizada por  $r = r(u, v)$ , la primera y segunda forma fundamental son expresadas por

$$I = dr.dr = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2 \quad (1)$$

$$II = -dr.dN = edu^2 + fdudv + gdv^2 \quad (2)$$

donde:

$$E = r_u.r_u, \quad F = r_u.r_v, \quad G = r_v.r_v$$

$$e = -N_u.r_u = N.r_{uu}$$

$$f = -N_v.r_u = N.r_{uv} = N.r_{vu} = -N_u.r_v$$

$$g = -N_v.r_v = N.r_{vv}$$

y  $N = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$  representa el vector normal.(Rogers y Schief, 2002)

Las ecuaciones de Mainardi-Codazzi para una superficie  $S$  son:

$$\left(\frac{e}{H}\right)_v - \left(\frac{f}{H}\right)_u + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^2 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^2 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^2 = 0 \quad (3)$$

$$\left(\frac{g}{H}\right)_u - \left(\frac{f}{H}\right)_v + \frac{e}{H}\Gamma_{22}^1 - 2\frac{f}{H}\Gamma_{12}^1 + \frac{g}{H}\Gamma_{11}^1 = 0. \quad (4)$$

La curvatura de Gauss es dada por:

$$K = \frac{1}{H} \left[ \left(\frac{H}{E}\Gamma_{11}^2\right)_v - \left(\frac{H}{E}\Gamma_{12}^2\right)_u \right], \quad (5)$$

donde:  $H^2 = EG - F^2$ .

En el caso particular, cuando la curvatura Gaussiana  $K = -1/\rho^2$  es una constante negativa, la superficie  $S$  se denomina *superficie pseudoesférica*. Ver (Santamaría, 2008) y (Tenenblat, 1986).

**Definición 0.4.** Sea  $S$  una superficie parametrizada por la longitud de arco a lo largo de las líneas asintóticas, entonces la primera y segunda forma fundamental son dadas por:

$$I(dr) = du^2 + 2\cos\omega dudv + dv^2 \quad (6)$$

$$II(dr) = \frac{2}{\rho} \sin\omega dudv \quad (7)$$

donde:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\omega = \frac{H}{\sqrt{EG}}, \quad E = \rho^2 a^2, \quad G = \rho^2 b^2.$$

**Proposición 1.** Si  $S$  es una superficie pseudoesférica, entonces la ecuación de Gauss (5) se reduce a la célebre *ecuación de Sine-Gordon*

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \sin\omega. \quad (8)$$

Introduciendo vectores ortonormales para una superficie  $S$  parametrizada por la longitud de arco a lo largo de líneas asintóticas, con curvatura Gaussiana  $K = -1/\rho^2$ , se tiene

$$A = r_u, \quad B = -r_u \times N = -r_u \times \frac{r_u \times r_v}{\sin \omega} = \csc \omega r_v - \cot \omega r_u, \quad C = N. \quad (9)$$

Utilizando las ecuaciones de Gauss-Weingarten se obtienen expresiones para las derivadas de  $A, B$  y  $C$  con respecto a  $u$  y  $v$ ,

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_u & 0 \\ \omega_u & 0 & 1/\rho \\ 0 & -1/\rho & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (1/\rho) \sin \omega \\ 0 & 0 & -(1/\rho) \cos \omega \\ -(1/\rho) \sin \omega & (1/\rho) \cos \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (11)$$

La nueva superficie pseudoesférica  $S'$  con el vector de posición  $r'$  es

$$r' = r + L \cos \phi A + L \sin \phi B, \quad (12)$$

donde  $L = |r' - r|$  es constante. Aquí  $\phi(u, v)$  es limitado por el requisito que en  $S'$ , como en  $S$ , las coordenadas  $u, v$  corresponden a la parametrización a lo largo de líneas asintóticas.

**Proposición 2.** Una condición necesaria para que  $S'$  esté parametrizada por la longitud de arco a lo largo de líneas asintóticas es que tenga la primera forma fundamental del tipo (6).

**Proposición 3.** Las ecuaciones de la Transformación de Bäcklund que relacionan las soluciones de la ecuación de Sine-Gordon son

$$\left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right)_u = \frac{\beta}{\rho} \sin \left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right) \quad (13)$$

$$\left( \frac{\omega' + \omega}{2} \right)_v = \frac{1}{\beta \rho} \sin \left( \frac{\omega' - \omega}{2} \right). \quad (14)$$

**Definición 0.5.** Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es un sistema incompatible si no tiene solución. Por el contrario se dice que es un sistema compatible si tiene alguna solución. En este último caso sólo caben dos posibilidades: o bien el sistema tiene una única solución, y en este caso se dice que es un *sistema compatible determinado*, o bien tiene infinitas soluciones, llamándose un *sistema compatible indeterminado*.

## Resultados y Discusión

**Proposición 4.** Los sistemas lineales (10) y (11) son compatibles si y solamente si  $\omega$  satisface la ecuación de Sine-Gordon (8).

*Demostración.* En efecto, tomando la primera ecuación del sistema (10)

$$A_u = -\omega_u B,$$

y derivando ahora con respecto a  $v$  se tiene la ecuación

$$A_{uv} = -\omega_{uv}B - \omega_u B. \quad (15)$$

De la misma manera, tomando la primera ecuación del sistema (11)

$$A_v = \frac{1}{\rho} \sin \omega C,$$

y derivando ahora con respecto a  $u$  se tiene la ecuación

$$A_{vu} = \frac{1}{\rho} \cos \omega \omega_u C + \frac{1}{\rho} \sin \omega C_u. \quad (16)$$

Ahora, las ecuaciones (15) y (16) son iguales si y solamente si se aplica la condición de las derivadas cruzadas  $A_{uv} = A_{vu}$ , e igualando se tiene

$$-\omega_{uv}B - \omega_u B_v = \frac{1}{\rho} \cos \omega \omega_u C + \frac{1}{\rho} \sin \omega C_u,$$

reemplazando los valores de  $B_v = -\frac{1}{\rho} \cos \omega C$  y  $C_u = -\frac{1}{\rho} B$  en la ecuación anterior, se tiene

$$-\omega_{uv}B - \omega_u \left(-\frac{1}{\rho} \cos \omega C\right) = \frac{1}{\rho} \cos \omega \omega_u C + \frac{1}{\rho} \sin \omega \left(-\frac{1}{\rho} B\right)$$

multiplicando internamente por  $B$  y sabiendo que  $B.B = 1$ ,  $B.C = 0$ , se tiene

$$-\omega_{uv} = -\frac{1}{\rho^2} \sin \omega$$

que es equivalente a la *ecuación de Sine-Gordon* dada por (8).

Se hace el mismo procedimiento tomando las demás ecuaciones y aplicando las condiciones  $B_{uv} = B_{vu}$  y  $C_{uv} = C_{vu}$ . Concluyendo así la demostración.  $\square$

**Proposición 5.** El ángulo entre las líneas asintóticas en  $S'$  dado por

$$\omega' = 2\phi - \omega \quad (17)$$

satisface la ecuación de Sine-Gordon (8).

*Demostración.* En efecto, derivando  $\omega'$  con respecto a  $u$ , se tiene

$$\begin{aligned} \omega'_u &= 2\phi_u - \omega_u \\ \omega'_u &= 2\left(\omega_u + \frac{\beta}{\rho} \sin \phi\right) - \omega_u \\ \omega'_u &= \omega_u + \frac{2\beta}{\rho} \sin \phi, \end{aligned}$$

ahora derivando con respecto a  $v$  se tiene

$$\begin{aligned} \omega'_{uv} &= \omega_{uv} + \frac{2\beta}{\rho} \cos \phi \phi_v \\ \omega'_{uv} &= \omega_{uv} + \frac{2\beta}{\rho} \cos \phi \left(\frac{1}{\beta\rho} \sin(\phi - \omega)\right) \\ \omega'_{uv} &= \frac{1}{\rho^2} \sin \omega + \frac{1}{\rho^2} 2 \cos \phi \sin(\phi - \omega), \end{aligned}$$

sumando las fracciones homogéneas, se tiene

$$\omega'_{uv} = \frac{\sin(2\phi - \omega)}{\rho^2}$$

como  $\omega' = 2\phi - \omega$ , se tiene finalmente

$$\omega'_{uv} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega'. \quad (18)$$

□

**Proposición 6.** Si  $r$  es el vector de coordenadas de la superficie  $S$  correspondiente a la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon  $\omega$ , entonces el vector de coordenadas  $r'$  de la nueva superficie  $S'$  correspondiente a la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon  $\omega'$  está dado por

$$r' = r + \frac{L}{\sin \omega} \left[ \sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) r_u + \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) r_v \right].$$

*Demostración.* En la ecuación (12) se va a reemplazar los valores de  $A, B$  y el ángulo  $\phi$  que está en función de  $\omega$  y  $\omega'$ . Entonces la ecuación (12) se convierte en

$$r' = r + L \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) r_u + L \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) (\csc \omega r_v - \cot \omega r_u)$$

multiplicando y agrupando los términos se tiene

$$r' = r + \left[ L \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) - L \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \cot \omega \right] r_u + L \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \csc \omega r_v,$$

utilizando las relaciones trigonométricas  $\cot \omega = \frac{\cos \omega}{\sin \omega}$ ,  $\csc \omega = \frac{1}{\sin \omega}$  y reemplazándolas, la ecuación anterior se convierte en

$$r' = r + \left[ L \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) - L \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \right] r_u + L \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \frac{1}{\sin \omega} r_v$$

factorizando  $\frac{L}{\sin \omega}$  de la ecuación anterior

$$r' = r + \frac{L}{\sin \omega} \left[ \sin \omega \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \cos \omega \right] r_u + \frac{L}{\sin \omega} \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) r_v$$

utilizando la relación trigonométrica  $\sin \omega \cos\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) \cos \omega = \sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right)$  y reemplazando en la ecuación anterior se tiene

$$r' = r + \frac{L}{\sin \omega} \sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) r_u + \frac{L}{\sin \omega} \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right) r_v$$

factorizando  $\frac{L}{\sin \omega}$  se tiene

$$r' = r + \frac{L}{\sin \omega} \left[ \sin\left(\frac{\omega - \omega'}{2}\right) r_u + \sin\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) r_v \right] \quad (19)$$

□

Para construir superficies correspondientes a soluciones solitón de la ecuación de Sine-Gordon, resulta más conveniente parametrizar las superficies pseudoesféricas en términos de coordenadas de curvatura.

$$x = u + v, \quad t = u - v \quad (20)$$

Si establecemos  $\omega = 2\theta$ , entonces la primera y segunda forma fundamental se convierten en

$$I = \cos^2 \theta dx^2 + \sin^2 \theta dt^2, \quad (21)$$

$$II = \frac{1}{\rho} \sin \theta \cos \theta (dx^2 - dt^2). \quad (22)$$

Por lo tanto, una triada ortogonal se puede introducir de acuerdo con

$$A^* = \frac{r_x}{\cos \theta}, \quad B^* = \frac{r_t}{\sin \theta}, \quad C^* = N \quad (23)$$

y las ecuaciones de Gauss-Weingarten se convierten en

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 & \theta_t & \frac{1}{\rho} \sin \theta \\ -\theta_t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \theta_x & 0 \\ -\theta_x & 0 & -\frac{1}{\rho} \cos \theta \\ 0 & \frac{1}{\rho} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \end{pmatrix} \quad (25)$$

**Proposición 7.** Los sistemas lineales (24) y (25) en  $\{A^*, B^*, C^*\}$  son compatibles si y solo si se cumple la ecuación de Sine-Gordon dada por

$$\theta_{xx} - \theta_{tt} = \frac{1}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta \quad (26)$$

*Demostración.* En efecto, tomando la primera ecuación del sistema (24)

$$A^*_x = \theta_t B^* + \frac{1}{\rho} \sin \theta C^*,$$

y derivando ahora con respecto a  $t$  se tiene la ecuación

$$A^*_{xt} = \theta_{tt} B^* + \theta_t B^*_t + \frac{1}{\rho} \cos \theta \theta_t C^* + \frac{1}{\rho} \sin \theta C^*_t. \quad (27)$$

De la misma manera, tomando la primera ecuación del sistema (25)

$$A^*_t = \theta_x B^*,$$

y derivando ahora con respecto a  $x$  se tiene la ecuación

$$A^*_{tx} = \theta_{xx} B^* + \theta_x B^*_x. \quad (28)$$

Ahora, las ecuaciones (27) y (28) son iguales si y solamente si se aplica la condición de las derivadas iteradas  $A^*_{xt} = A^*_{tx}$ , e igualando se tiene

$$\theta_{tt} B^* + \theta_t B^*_t + \frac{1}{\rho} \cos \theta \theta_t C^* + \frac{1}{\rho} \sin \theta C^*_t = \theta_{xx} B^* + \theta_x B^*_x.$$

Reemplazando los valores de  $B_t^* = -\theta_x A^* - \frac{1}{\rho} \cos \theta C^*$ ,  $C_t^* = \frac{1}{\rho} \cos \theta B^*$  y  $B_x^* = -\theta_t A^*$  en la ecuación anterior, se tiene

$$\theta_{tt} B^* + \theta_t \left( -\theta_x A^* - \frac{1}{\rho} \cos \theta C^* \right) + \frac{1}{\rho} \cos \theta \theta_t C^* + \frac{1}{\rho} \sin \theta \left( \frac{1}{\rho} \cos \theta B^* \right) = \theta_{xx} B^* + \theta_x (-\theta_t A^*),$$

multiplicando por  $B^*$  y sabiendo que  $B^* \cdot B^* = 1$ ,  $B^* \cdot C^* = 0$ ,  $B^* \cdot A^* = 0$  se tiene

$$\theta_{tt} + \frac{1}{\rho^2} \sin \theta \cos \theta = \theta_{xx}$$

que es equivalente a la ecuación dada por (26).

De la misma manera, se procede para las demás ecuaciones y aplicando las condiciones  $B_{xt}^* = B_{tx}^*$  y  $C_{xt}^* = C_{tx}^*$ , se concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 8.** Si  $\omega = 0$  es la solución nula de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon (8), entonces se puede construir una segunda solución no nula  $\omega'$  utilizando la transformación de Bäcklund (13 y 14).

*Demostración.* Sustituyendo la solución nula  $\omega = 0$  de la ecuación (8) en la transformación de Bäcklund (13) y (14) respectivamente, se tiene el par de ecuaciones diferenciales

$$\omega'_u = \frac{2\beta}{\rho} \sin \left( \frac{\omega'}{2} \right), \quad (29)$$

$$\omega'_v = \frac{2}{\beta\rho} \sin \left( \frac{\omega'}{2} \right). \quad (30)$$

dividiendo por  $\sin \left( \frac{\omega'}{2} \right)$  la ecuación (30), se tiene

$$\frac{\omega'_v}{\sin \left( \frac{\omega'}{2} \right)} = \frac{2}{\beta\rho}$$

integrando con respecto a  $v$  la ecuación anterior, se tiene

$$2 \ln \left( \tan \left( \frac{\omega'}{4} \right) \right) = \frac{2}{\beta\rho} v + f(u) \quad (31)$$

derivando la ecuación (31) con respecto a  $u$ , se tiene la ecuación

$$\frac{\omega'_u}{\sin \left( \frac{\omega'}{2} \right)} = [f(u)]_u \quad (32)$$

sustituyendo la ecuación (29) en (32), resulta

$$\frac{2\beta}{\rho} = [f(u)]_u \quad (33)$$

nuevamente integrando con respecto a  $u$  la ecuación anterior (33)

$$f(u) = \frac{2\beta}{\rho}u + \alpha_1 \quad (34)$$

donde  $\alpha_1$  es una constante de integración. Ahora sustituyendo la ecuación (34) en (31), se tiene

$$2 \ln\left(\tan\left(\frac{\omega'}{4}\right)\right) = \frac{2}{\beta\rho}v + \frac{2\beta}{\rho}u + \alpha_1 \quad (35)$$

obteniendo así;

$$\tan\left(\frac{\omega'}{4}\right) = \exp\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \frac{\alpha_1}{2}\right) \quad (36)$$

que conduce a la nueva solución  $\omega'$ ,

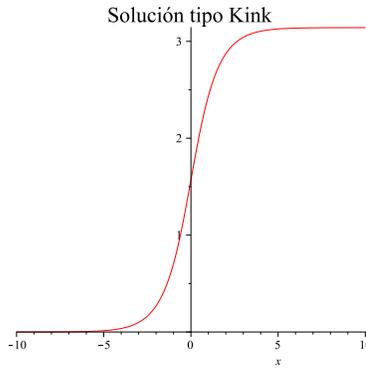
$$\omega'(u, v) = 4 \arctan\left[\exp\left(\frac{\beta}{\rho}u + \frac{1}{\beta\rho}v + \alpha\right)\right] \quad (37)$$

donde  $\alpha = \frac{\alpha_1}{2}$  es una constante de integración.  $\square$

Para los valores  $\alpha = 0, \rho = 1, \omega' = 2\omega, u = v = x/2, \beta = 1$  en (37) se obtiene una *solución estática*

$$\omega = \psi_k(x, t) = 2 \arctan[\exp(x)] \quad (38)$$

la cual es llamada **solución kink**.



**Proposición 9.** Existe una relación entre la solución de la Ecuación de Sine-Gordon dada por (38) y la superficie pseudoesférica dada por

$$r(u, v) = (\operatorname{sech}(u)\cos(v), \operatorname{sech}(u)\sin(v), u - \tanh(u)).$$

*Demostración.* Ver (Chininin, 2015).  $\square$

**Proposición 10.** La solución estática dada por (38) representa una solución solitón.

*Demostración.* Haciendo un cambio de variable,

$$x = \frac{x' - \gamma t}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

donde  $|\gamma| < 1$ , en la ecuación (38),

$$\phi_k(x' - \gamma t) = 2 \arctan\left[\exp\left(\frac{x' - \gamma t}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\right)\right] \quad (39)$$

que es la candidata a ser solución solitón.

No hay que olvidar  $z = x' - \gamma t$ , convierte a la ecuación (39) en

$$\psi(x, t) = \phi(x' - \gamma t) = \phi(z),$$

Para comprobar si es solución solitón, simplemente se verifica si se cumplen las propiedades de una onda solitaria y solitón.

Analizando cuando  $z = x' - \gamma t \rightarrow -\infty$  en la ecuación (39):

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\infty} \phi(z) &= \lim_{z \rightarrow -\infty} 2 \arctan\left[\exp\left(\frac{z}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\right)\right] \\ &= 2 \arctan(0) \\ &= 2(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

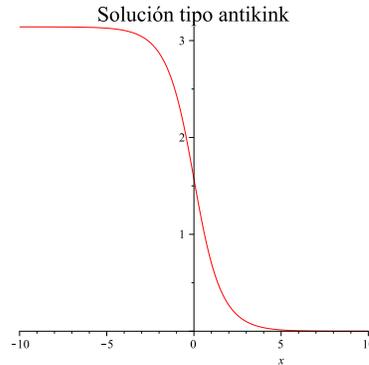
De la misma manera analizando cuando  $z = x' - \gamma t \rightarrow \infty$  en la ecuación (39):

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) &= \lim_{z \rightarrow \infty} 2 \arctan\left[\exp\left(\frac{z}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\right)\right] \\ &= 2 \arctan(\infty) \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Con esto, se demuestra que existe un estado asintótico constante cuando  $z \rightarrow -\infty$  el cual es cero y de la misma manera existe otro estado asintótico constante cuando  $z \rightarrow \infty$  el cual es  $\pi$ . Por lo tanto, se concluye que la solución dada por  $\phi(z)$  es una onda solitaria.

De la misma manera, se construye una solución llamada **solución antikink**, dada por

$$\psi_k^-(x, t) = 2 \arctan[\exp(-x)] \quad (40)$$



La colisión de un kink-antikink, está dada por:

$$\phi_{k\bar{k}} = 2 \arctan \left[ \frac{\sinh\left(\frac{\gamma t}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)}{\gamma \cosh\left(\frac{x'}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right)} \right]$$

la cual preserva la forma del kink(antikink) después del choque. Por tanto se concluye que la solución tipo kink(antikink) para la ecuación de Sine-Gordon tiene el comportamiento de un soliton.  $\square$

## Conclusiones y Sugerencias

Para encontrar soluciones de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon se pueden utilizar herramientas de la geometría diferencial como la Transformación de Bäcklund, la cual en este caso sirvió para determinar la solución de la ecuación diferencial parcial de Sine-Gordon y que además mediante un análisis se obtuvo una relación de la solución con la superficie llamada “pseudoesfera”.

También se analizó la solución concluyendo que tiene la forma característica de un solitón.

Se sugiere que se utilice la geometría hiperbólica para una mejor simplificación de resultados.

## Referencias

- [1] Avendaño, M. (2006). Teorema fundamental de superficies y el criterio de Frobenius.
- [2] Chinín, F. (2015). Transformación de Bäcklund para la ecuación de Sine-Gordon, superficies pseudoesféricas y los solitones. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo”, Lambayeque.
- [3] Cuenda, S. (2007). Secuencia genética y dinámica de excitaciones no lineales de ADN. PhD thesis, Universidad Carlos III de Madrid.
- [4] González, M. (2001). Kinks, Sistemas Integrables y Geodésicas: Solitones en el Modelo Sigma O(3) Lineal. PhD thesis, Universidad de Salamanca.
- [5] Rogers & Schief (2002). Bäcklund and Darboux transformations.
- [6] Santamaria, O., Damián, Huancas, & Julca, P. (2008). Introducción a la geometría diferencial de curvas y superficies.
- [7] Tenenblat, K. (1986). Introdução à Geometria Diferencial vol. I.