# $\sigma$-álgebras generadas por $\pi$-sistemas

M.Sc. Santamaria Santisteban Oscar
Profesor Asociado TC. Dpto de Matemática UNPRG

**Resumen**

*Presentamos una clase más amplia que la colección de $\sigma$-álgebras sobre un conjunto $X$: cada colección en esta clase se llama sistema de Dynkin. Tratamos el caso particular cuando estas colecciones son generadas por $\pi$-sistemas y se dan también algunas aplicaciones relacionadas a unicidad de medidas y también a medidas invariantes.*
**Palabras claves:** *$\pi$-sistemas, $\lambda$-sistemas, sistemas de Dynkin*

**Abstract**

*We present a class more large that collection of $\sigma$-algebras on a set $X$: each collection in this class is called Dynkin system. We treat the particular case when these collections are generated by $\pi$-systems and we give some applications related to unicity of measures and also to invariant measures.*
**Palabras claves:** *$\pi$-sistemas, $\lambda$-sistemas, sistemas de Dynkin*

# Introducción

Un espacio natural sobre el cual se desarrollan nociones de teoría de la medida son las $\sigma$-álgebras. Un $\sigma$-álgebra sobre un conjunto $X$ es una colección $\mathscr{A}$, formada por subconjuntos de $X$, que tiene a $X$ entre sus elementos, es cerrada bajo complementos y es cerrada bajo uniones enumerables. Presentamos a continuación la noción de sistema de Dynkin, o $\lambda$-sistema, y mostramos que la colección de $\lambda$-sistemas contiene de manera propia a la colección de $\sigma$-álgebras sobre un conjunto dado. Son de particular interés aquellos $\lambda$-sistemas generados por $\pi$-sistemas, pues en este caso son también $\sigma$-álgebras, y muchas propiedades solo necesitan ser verificadas en el $\pi$-sistema generador.
En cuanto a notación, dado un conjunto $X$, su conjunto de partes será denotado como $\mathscr{P}(X)$.

# Materiales y métodos

**Definición 1** ($\pi$-sistema)**.** *Sea $X$ un conjunto. Una colección $\mathcal{P} \subseteq \mathscr{P}(X)$ se denomina $\pi$-sistema (o $\pi$-clase) sobre $X$ si es cerrada bajo intersecciones de colecciones finitas contenidas en $\mathcal{P}$.*

**Ejemplo 1.**

1. En todo conjunto $X$, las colecciones $\{\emptyset, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ son $\pi$-sistemas. A diferencias de las $\sigma$-álgebras, estas no son las colecciones más pequeñas que podamos encontrar dentro de todos los $\pi$-sistemas sobre un conjunto dado. Por ejemplo, la colección $\{X\}$ es también un $\pi$-sistema sobre $X$.

2. En $X = \mathbb{R}$ la colección $\mathcal{P}$ formada por $\emptyset$ y todos los intervalos de $\mathbb{R}$ constituyen un $\pi$-sistema. Mas generalmente, en $X = \mathbb{R}^n$ la colección formada por el conjunto vacío y todos los rectángulos $n$-dimensionales, es un $\pi$-sistema.

3. En $X = \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) la colección $\mathcal{P}$ formada por todas las bolas abiertas no es un $\pi$-sistema.

4. Sobre un espacio topológico $(X, \tau)$, la colección $\tau$ es un $\pi$-sistema. También es un $\pi$-sistema la colección de todos los conjuntos cerrados en $X$.

5. En un $\pi$-sistema no es necesaria la presencia del conjunto vacío. Por ejemplo, la colección de bolas concéntricas forman un $\pi$-sistema pero $\emptyset$ no es elemento en dicha colección.

**Definición 2** (Sistema de Dynkin)**.** *Dado un conjunto $X$, una colección $\mathcal{L} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es un* sistema de Dynkin *(o un $\lambda$-sistema o sistema $\sigma$-aditivo) sobre $X$ si*

1. *$X$ es elemento de $\mathcal{L}$,*

2. *Para cada $A \in \mathcal{L}$, el complemento $X - A$ también pertenece a $\mathcal{L}$,*

3. *Para toda familia enumerable disjunta $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}$, la unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es elemento de $\mathcal{L}$.*

Observe que la condición $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$, establece la diferencia entre un $\sigma$-álgebra y un $\lambda$-sistema. De hecho toda colección que es un $\sigma$-álgebra es también un $\lambda$-sistema.

Sin embargo, *no todo $\lambda$-sistema es un $\sigma$-álgebra*. Por ejemplo, si $X$ es un conjunto finito con un número par de elementos (luego $\mathscr{P}(X)$ es también un conjunto finito formado por conjuntos finitos) entonces la colección $\mathcal{L}$, formada por todos los subconjuntos de $X$ que tienen también un número par de elementos, es un $\lambda$-sistema. Cuando $\mathcal{L}$ está formada por dos o más elementos, la colección no necesariamente es un álgebra, por tanto, no necesariamente es $\sigma$-álgebra. Para ver que $\mathcal{L}$ no es un álgebra tome dos conjuntos, elementos de $\mathcal{L}$, cada uno con dos elementos pero con un elemento común entre ellos. La unión de estos tendrá solamente tres elementos y, por tanto, dicha unión no está en $\mathcal{L}$.

Todo $\sigma$-álgebra es un $\pi$-sistema, sin embargo existen $\pi$-sistemas que no son ni $\sigma$-álgebras ni $\lambda$-sistemas.

**Lema 0.1.** *Sea $\mathcal{L}$ un $\lambda$-sistema. Para todo $A, B \in \mathcal{L}$, si $A \subseteq B$ entonces el conjunto $B - A$ es elemento de $\mathcal{L}$.*

*Demostración.* Observe que $B - A = X - [A \cup (X - B)]$. Siendo $B$ elemento de $\mathcal{L}$, y este es un $\lambda$-sistema, entonces $X - B$ es también elemento de $\mathcal{L}$. Por otro lado, por ser $A \subseteq B$ entonces $A \cap (X - B) = \emptyset$ luego, nuevamente por ser $\mathcal{L}$ un $\lambda$-sistema, se concluye que $A \cup (X - B) \in \mathcal{L}$. Esto a su vez implica que el complemento $X - [A \cup (X - B)]$ está en $\mathcal{L}$, por tanto $B - A \in \mathcal{L}$. $\square$

El siguiente resultado proporciona una manera equivalente de comprobar que una colección dada un es $\lambda$-sistema.

**Proposición 0.2.** *Sea $X$ un conjunto. Una colección $\mathcal{L} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es un* sistema de Dynkin *sobre $X$ si, y solo si,*

1. *$X$ es elemento de $\mathcal{L}$,*
2. *Para cada $A \in \mathcal{L}$, el complemento $X - A$ también pertenece a $\mathcal{L}$,*
3. *Para todo $A, B \in \mathcal{L}$ tal que $A \cap B = \emptyset$ se tiene que $A \cup B \in \mathcal{L}$ y para toda familia enumerable $\{A_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{L}$, tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, la unión $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es también elemento de $\mathcal{L}$.*

*Demostración.* Suponiendo que $\mathcal{L}$ es un $\lambda$-sistema y $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ es una familia enumerable tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ entonces del Lema 0.1 se deduce que la familia $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ definida como

$$B_1 = A_1, \;\; B_i = A_i - A_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots$$

está formada por elementos de $\mathcal{L}$. Además observe que esta es disjunta y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Siendo $\mathcal{L}$ un $\lambda$-sistema, el conjunto $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ es elemento de $\mathcal{L}$ y, por tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ también.

Recíprocamente, si $\mathcal{L} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es una colección con las condiciones (1), (2) y (3) enunciadas en la proposición y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}$ es una familia disjunta entonces la familia $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es tal que $C_n \in \mathcal{L}$ para todo $n$, $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \cdots$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$, y luego se deduce se manera inmediata que $\mathcal{L}$ es un sistema de Dynkin. $\square$

En el siguiente resultado se muestra que la intersección de la colección de $\pi$-sistemas y la colección de $\lambda$-sistemas, sobre un conjunto $X$, está contenida en la colección de $\sigma$-álgebras sobre dicho conjunto.

**Lema 0.3.** *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ es a la vez un $\pi$-sistema y un $\lambda$-sistema sobre $X$ entonces $\mathcal{F}$ es un $\sigma$-álgebra sobre $X$.*

*Demostración.* Por ser $\mathcal{F}$ un $\lambda$-sistema, este tiene a $X$ entre sus elementos y cerrado bajo complementos. Por tanto, sólo se requiere comprobar que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones enumerables. Considere entonces una colección enumerable $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, formada por elementos de $\mathcal{F}$ y luego forme la familia $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definida como

$$B_1 = A_1\ ,\ B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_i,\ i = 2, 3, \ldots$$

Es claro que $B_1 \in \mathcal{F}$, pues $A_1 \in \mathcal{F}$. Como $A_i \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}$ es un $\lambda$-sistema entonces $A_i^c \in \mathcal{F}$. Pero además $\mathcal{F}$ es un $\pi$-sistema entonces usando inducción se demuestra que para cada $i \geq 2$, el conjunto $\bigcap_{j=1}^{i-1} A_i^c$ es elemento de $\mathcal{F}$ luego, nuevamente por ser $\mathcal{F}$ un $\pi$-sistema resulta que $A_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_i^c$ está en $\mathcal{F}$. Siendo $B_i = A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_i = A_i \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} A_i^c$ se concluye que $B_i \in \mathcal{F}$, para cada $i = 1, 2, \ldots$ Además $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, y como $\mathcal{F}$ es un $\lambda$-sistema entonces $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$. Finalmente, de la igualdad $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ se concluye que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. □

La definición que sigue es análoga a la de $\sigma$-álgebra generada. Sea $X$ un conjunto no vacío, $\mathcal{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ una colección arbitraria y $\mathscr{L}$ el conjunto formado por todos los $\lambda$-sistemas sobre $X$ que contienen a $\mathcal{A}$, esto es,

$$\mathscr{L} := \{\mathcal{L} \subseteq \mathscr{P}(X) :\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L} \text{ y } \mathcal{L} \text{ es } \lambda\text{-sistema sobre } X\}.$$

**Definición 3** ($\lambda$-sistema generado)**.** *Se llama $\lambda$-sistema generado por $\mathcal{A}$ al conjunto*

$$\lambda(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathcal{L}\in\mathscr{L}} \mathcal{L}.$$

En particular observe que $\lambda(\mathcal{A})$ es el menor $\lambda$-sistema que contiene a $\mathcal{A}$.

# Resultados y Discusión

## Teorema principal

**Teorema 0.4** ($\pi\lambda$-teorema de Dynkin)**.** *Sea $X$ un conjunto no vacío y considere las colecciones $\mathcal{P}, \mathcal{L} \subseteq \mathscr{P}(X)$. Si $\mathcal{P}$ es $\pi$-sistema, $\mathcal{L}$ es $\lambda$-sistema y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$ entonces $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$*

*Demostración.* Sea $\lambda(\mathcal{P})$ el $\lambda$-sistema generado por $\mathcal{P}$. Si logramos comprobar que $\lambda(\mathcal{P})$ es un $\pi$-sistema entonces del Lema 0.3 se concluiría que $\lambda(\mathcal{P})$ es un $\sigma$-álgebra. Pero por hipótesis $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$ y como $\lambda(\mathcal{P})$ es el menor $\lambda$-sistema que contiene a $\mathcal{P}$ entonces $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$. Suponiendo que esta inclusión es válida y suponiendo también que $\lambda(\mathcal{P})$ es un $\sigma$-álgebra entonces, por ser $\sigma(\mathcal{P})$ la menor $\sigma$-álgebra que contiene a $\mathcal{P}$, se tendrá que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$, luego el teorema estaría probado. Por tanto, todo se reduce a probar que $\lambda(\mathcal{P})$ es un $\pi$-sistema. Esto se hará en varios pasos.

1. Para cada $A \in \lambda(\mathcal{P})$, la colección $\mathcal{L}_A = \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})\}$ es un $\lambda$-sistema.

   *a*) Puesto que $A \cap X = A \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $X \in \mathcal{L}_A$.

   *b*) Sea $B \in \mathcal{L}_A$. Por la definición de $\mathcal{L}_A$, $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$ y como $\lambda(\mathcal{P})$ es un $\lambda$-sistema entonces $(A \cap B)^c \in \lambda(\mathcal{P})$. Por otro lado, como $A \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $A^c \in \lambda(\mathcal{P})$. Además, siendo $A^c$ y $A \cap B$ conjuntos disjuntos entonces, nuevamente por ser $\lambda(\mathcal{P})$ un $\lambda$-sistema, se concluye que $A^c \cup (A \cap B) \in \lambda(\mathcal{P})$. Luego $(A^c \cup (A \cap B))^c \in \lambda(\mathcal{P})$, es decir $A \cap B^c \in \lambda(\mathcal{P})$.

   *c*) Finalmente, sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia disjunta de elementos en $\mathcal{L}_A$, esto es, $B_n \cap B_m = \emptyset$ para $n \neq m$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $A \cap B_n \in \lambda(\mathcal{P})$. Pero además de esto observe que para $n \neq m$, los conjuntos $A \cap B_n$ y $A \cap B_m$ son disjuntos, luego siendo $\lambda(\mathcal{P})$ un $\lambda$-sistema se concluye que $\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap A) \in \lambda(\mathcal{P})$. Usando igualdad

   $$A \cap \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap B_n) .$$

   se concluye que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{L}_A$.

2. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$, para todo $A \in \mathcal{P}$.

   En efecto, considere un elemento arbitrario $B \in \mathcal{P}$. Como $\mathcal{P}$ un $\pi$-sistema y $A \in \mathcal{P}$ entonces $B \cap A \in \mathcal{P}$. Pero además $\mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P})$ entonces $B \cap A \in \lambda(\mathcal{P})$, lo cual a su vez implica que $B \in \mathcal{L}_A$.

3. $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$, para todo $A \in \mathcal{P}$.

   En efecto, esto es consecuencia del hecho de ser $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$ y de ser $\lambda(\mathcal{P})$ el menor $\lambda$-sistema que contiene a $\mathcal{P}$.

4. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$, para todo $A \in \lambda(\mathcal{P})$.

   Sea $D \in \mathcal{P}$ arbitrario. Por el paso (3) se tiene que $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_D$. Pero además, si $A \in \lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_D$ entonces $A \in \mathcal{L}_D$ luego, por la definición de $\mathcal{L}_D$, resulta $D \cap A \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces, ahora por definición de $\mathcal{L}_A$, resulta que $D \in \mathcal{L}_A$.

5. $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$, para todo $A \in \lambda(\mathcal{P})$.

   Pues como $A \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces del paso (4) resulta $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_A$. Entonces la inclusión $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$ resulta del hecho de ser $\lambda(\mathcal{P})$ el menor $\lambda$-sistema que contiene a $\mathcal{P}$.

6. Queda solamente mostrar que si $A, B \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $A \cap B \in \lambda(\mathcal{P})$.

   Pero si $A \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces del paso (5), $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}_A$. Como $B \in \lambda(\mathcal{P})$ entonces $B \in \mathcal{L}_A$ luego $B \cap A \in \lambda(\mathcal{P})$. Y esto muestra que $\lambda(\mathcal{P})$ es un $\pi$-sistema. $\square$

**Corolario 1.** Sea $X$ un conjunto no vacío. Si $\mathcal{P}$ es un $\pi$-sistema entonces la $\sigma$-álgebra y el $\lambda$-sistema generados por $\mathcal{P}$ son iguales.

*Demostración.* Como $\mathcal{P}$ es un $\pi$-sistema y $\mathcal{P} \subseteq \lambda(\mathcal{P})$ entonces del Teorema 0.4 resulta que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \lambda(\mathcal{P})$. Pero $\sigma(\mathcal{P})$, por ser $\sigma$-álgebra, es también un $\lambda$-sistema, que contiene a $\mathcal{P}$, entonces $\lambda(\mathcal{P}) \subseteq \sigma(\mathcal{P})$. Por tanto, $\sigma(\mathcal{P}) = \lambda(\mathcal{P})$. $\square$

# Algunas Aplicaciones

## Unicidad de medidas

Como una aplicación del $\pi\lambda$-teorema de Dynkin se tiene el siguiente resultado sobre unicidad de medidas.

**Teorema 0.5** (Unicidad de medidas)**.** *Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, $\mathcal{P}$ un $\pi$-sistema y $\sigma(\mathcal{P})$ el respectivo $\sigma$-álgebra generada. Si $\mu_1, \mu_2 \colon \sigma(\mathcal{P}) \to [0, \infty]$ son medidas de probabilidad tales que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}$, entonces $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ para todo $B \in \sigma(\mathcal{P})$.*

*Demostración.* Considere la colección $\mathcal{L} = \{B \in \sigma(\mathcal{P}) : \mu_1(B) = \mu_2(B)\}$. Es claro que $\mathcal{L} \subseteq \sigma(\mathcal{P})$. Por tanto, la primera tarea aquí es mostrar que $\mathcal{L}$ es un $\lambda$-sistema.

1. Como $\mu_1$ y $\mu_2$ son medidas de probabilidad entonces $\mu_1(X) = 1 = \mu_2(X)$ y, por tanto, $X \in \mathcal{L}$.

2. Sea $A \in \mathcal{L}$. Puesto que $X = A \cup A^c$ y $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ entonces

$$\mu_1(A^c) = 1 - \mu_1(A) = 1 - \mu_2(A) = \mu_2(A^c),$$

lo cual prueba que $A^c \in \mathcal{L}$.

3. Finalmente, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de elementos en $\mathcal{L}$, disjuntos dos a dos. En particular $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces usando la propiedad $\sigma$-aditiva de las medidas

$$\mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1\left(A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2\left(A_n\right) = \mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right)$$

lo cual prueba que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$.

Por hipótesis se sabe que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}$ entonces $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$. El $\pi\lambda$-teorema de Dynkin garantiza que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$.

Siendo entonces $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{L}$, se concluye que la igualdad $\mu_1(B) = \mu_2(B)$ es válida en todo el $\sigma$-álgebra $\sigma(\mathcal{P})$ $\square$

## Medidas invariantes

**Definición 4.** *Sea $(X, \mathscr{A})$ un espacio medible y $T\colon X \to X$ una aplicación medible. Una medida $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ es $T$-invariante si para todo conjunto $A \in \mathscr{A}$ se cumple que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.*

Medidas invariantes son utilizadas en el estudio de sistemas dinámicos, y estas aparecen en teoremas importantes como el teorema de recurrencia de Poincaré ([1]).

Como otra aplicación del $\pi\lambda$-teorema de Dynkin es posible probar que toda medida que es $T$-invariante en un $\pi$-sistema, lo es también en la $\sigma$-álgebra generada por dicha colección.

**Teorema 0.6.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P})$, $\mathcal{P}$ es un $\pi$-sistema y $\mu$ es una medida de probabilÃdad. Si $T : X \to X$ una transformación medible tal que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{P}$ entonces $\mu$ es $T$-invariante.*

*Demostración.* Debemos mostrar que la igualdad $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ es válida para todo $A \in \mathcal{F}$. Para ello considere la colección

$$\mathcal{L} = \{B \in \mathcal{F} :\ \mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)\}.$$

Por la misma definición de $\mathcal{L}$ y por la hipótesis se tiene que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{F}$.

Siendo

$$\mu(T^{-1}(X)) = \mu(X) = 1$$

se deduce que $X \in \mathcal{L}$. Además de esto, si $A \in \mathcal{L}$ entonces $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Como $T^{-1}(A^c) = \big(T^{-1}(A)\big)^c$ entonces

$$\mu(T^{-1}(A^c)) = \mu(\big(T^{-1}(A)\big)^c) = 1 - \mu(T^{-1}(A)) = 1 - \mu(A) = \mu(A^c)$$

lo cual implica que $A^c \in \mathcal{L}$. Finalmente, sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de elementos de $\mathcal{L}$, disjuntos dos a dos. Puesto que $T^{-1}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \biguplus_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n)$ entonces

$$\begin{aligned}
\mu\left(T^{-1}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) &= \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} T^{-1}(A_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A_n)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right)
\end{aligned}$$

lo cual demuestra que $\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$. Siendo entonces $\mathcal{L}$ un $\lambda$-sistema, por el $\pi\lambda$-teorema de Dynkin se tiene que $\sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{L}$, lo cual a su vez implica que $\mathcal{F} = \mathcal{L}$. Por tanto, $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Es decir, $\mu$ es una medida $T$-invariante. $\square$

El Teorema 0.6 es también válido para medidas no necesariamente de probabilidad. Para ello, en dicho teorema debemos asumir, además de las hipótesis dadas, que $X \in \mathcal{P}$.

**Ejemplo 2.** Considere la transformación $T\colon [0,1] \to [0,1]$ definida como

$$T(x) = 10x - [\![10x]\!],$$

donde $[\![10x]\!]$ representa el máximo entero que es menor o igual a $10x$.

La medida de Lebesgue en $[0,1]$ es $T$-invariante. Para mostrarlo basta verificar esta afirmación sobre los intervalos contenidos en $[0,1]$. Como la colección de intervalos es un $\pi$-sistema el resultado se obtendría entonces del Teorema 0.6. En efecto, dado cualquier intervalo $A$ contenido en $[0,1]$, la preimagen $T^{-1}(A)$ está conformada por $10$ subintervalos, cada uno con longitud igual a la décima parte de la longitud de $A$. Entonces $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Como la colección de intervalos genera a todos los conjuntos de Borel, la igualdad $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ es válida para todo conjunto Boreliano contenido en $[0,1]$.

## Medidas sobre cilindros

Fije un número natural $n \geq 2$ y considere el conjunto $\Sigma_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Sean $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ números reales no negativos tales que

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1} = 1.$$

(observe que $p_i \in [0,1]$). Usando $\Sigma_n$ se crea el espacio

$$\Omega_n^R = \{s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) : \ s_i \in \Sigma_n\},$$

el cual es conocido como *espacio de códigos*. Observe que los elementos de $\Omega_n^R$ son sucesiones infinitas formadas por números naturales entre 0 y $n-1$. Este conjunto es bastante utilizado en dinámica simbólica, para el estudio de sistemas dinámicos. Este espacio describe el conjunto de órbitas de cada punto en un espacio dado. En este caso, las órbitas son colecciones de imágenes obtenidas mediante los iterados de la aplicación (shift) de Bernoulli $f : \Omega_n^R \to \Omega_n^R$, la cual es definida por

$$f(s_0 s_1 s_2 s_3 \ldots) = (s_1 s_2 s_3 \ldots).$$

**Definición 5** (Cilindros)**.** *Se llama cilindro a un conjunto de la forma*

$$C_{t_0 t_1 \ldots t_k} = \left\{s = (s_0 s_1 \cdots) \in \Omega_n^R : \ s_i = t_i \, , \, i = 0, 1, \ldots, k\right\}$$

Dados dos cilindros $C_{t_0 t_1 \ldots t_k}$ y $C_{t_0 t_1 \ldots t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n}$,

$$C_{t_0 t_1 \ldots t_k} \cap C_{t_0 t_1 \ldots t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n} = C_{t_0 t_1 \ldots t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n}$$

pues $C_{t_0t_1\ldots t_k,t_{k+1},\ldots,t_n} \subseteq C_{t_0t_1\ldots t_k}$, como puede comprobarse inmediatamente. Además, dados los cilindros $C_{t_0t_1\ldots t_k}$ y $C_{s_0s_1\ldots s_r}$ tal que (suponemos $k \leq r$) $t_j \neq s_j$ para algún $0 \leq j \leq k$ entonces

$$C_{t_0t_1\ldots t_k} \cap C_{s_0s_1\ldots s_r} = \emptyset.$$

Además de esto, respecto a la aplicación de $f$ de Bernoulli

$$f(C_{t_0t_1\ldots t_k}) = C_{t_1\ldots t_k}$$

lo cual implica que

$$f^{-1}(C_{t_1\ldots t_k}) = \bigcup_{i=0}^{n-1} C_{i,t_1\ldots t_k}.$$

Observe que esta unión es disjunta pues, como ya hemos observado, cuando $i \neq j$. resulta $C_{i,t_1\ldots t_k} \cap C_{j,t_1\ldots t_k} = \emptyset$.

Considere la familia de cilindros

$$\mathcal{C} = \left\{C_{i_1,\ldots,i_k} \subseteq \Omega_n^R : \ k = 1, 2, \ldots \ , \ i_j \in \Sigma_n\right\}$$

y la $\sigma$-álgebra generada $\sigma(\mathcal{C})$. Observe que $\mathcal{C}$ es un $\pi$-sistema, pues la intersección de dos cilindros es nuevamente un cilindro.
Considere la medida $\mu\colon \sigma(\mathcal{C}) \to [0, 1]$ tal que en cada elemento $C_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{C}$,

$$\mu(C_{i_1,\ldots,i_k}) := p_{i_1} \cdots p_{i_k} = \prod_{j=1}^{k} p_{i_j}. \tag{1}$$

**Lema 0.7.** *La medida $\mu$, cuyo valor sobre cada cilindro es dada en (1), es una medida invariante.*

*Demostración.* De acuerdo al Teorema 0.6, sólo basta comprobar la invariancia en cada elemento de $\mathcal{C}$. Dado $C_{i_1,\ldots,i_k} \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned}\mu\left(f^{-1}(C_{t_1\ldots t_k})\right) &= \mu\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} C_{i,t_1\ldots t_k}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mu(C_{i,t_1\ldots t_k})\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} p_i p_{t_1} \ldots p_{t_k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_{t_1} \dots p_{t_k} \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} p_i}_{=1} \\
&= p_{t_1} \dots p_{t_k} = \mu(C_{i_1,\dots,i_k})
\end{aligned}
$$

lo cual muestra la invariancia de $\mu$. $\square$

# Conclusiones

1. La colección de $\sigma$-álgebras está contenida de manera propia en la colección de $\lambda$-sistemas. Sin embargo, del resultado principal (Teorema 0.4) se obtiene como consecuencia inmediata que todo $\lambda$-sistema generado por un $\pi$-sistema es también un $\sigma$-álgebra.

2. Otra utilidad importante que se obtiene del Teorema 0.4 es que algunas propiedades solo necesitan ser verificadas sobre el $\pi$-sistema, en lugar de ser verificadas sobre todo el $\sigma$-álgebra generada por dicha colección. Por ejemplo, la unicidad de medidas (Teorema 0.5) y la invariancia de una medida bajo una transformación medible (Teorema 0.6).

3. Como sugerencia, sería importante desarrollar un conjunto de resultados referidos solamente a $\lambda$-sistemas, y tratar de estudiar resultados conocidos sobre $\sigma$-álgebras en el contexto de $\lambda$-sistemas.

# Referencias


[1] Barreira, L. & Valls, C. (2013). *Dynamical systems: An introduction*. London New York: Springer.

[2] Cohn, D. (2013). *Measure theory*. 2nd ed. New York, NY: Birkhüser.

[3] Vestrup, E. M. (2003) *The Theory of Measures and Integration*. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience.

[4] Walters, P. (1982). *Introduction to Ergodic Theory*. New York: Springer-Verlag.