Resolución inmersa de superficies

Dr. Hernán Neciosup Puican , Dr. Percy Fernández Sánchez y Dr. Jorge Mozo Fernández
Dpto. de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú. Universidad de Valladolid. España

Resumen

*En este artículo presentamos, de manera esquemática, un método de resolución inmersa de superficies complejas, siguiendo el esquema de [**C**] y [**Gs**]. Describimos la resolución inmersa del germen de superficie casi-homogénea* $(\{z^2 + \varphi(x, y) = 0\}, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$*, donde* φ *define una curva singular plana sin parte distinguida y* $\nu_0(\varphi) \geq 2$*, germen de superficie cuspidal. También decribimos la topología del divisor excepcional.*

Palabras clave: *Resolución de singularidades.*

Abstract

*In this article, we present, schematically, a method of an embedded resolution of complex surfaces, according to the scheme of [**C**] and [**Gs**]. We describe an embedded resolution of the surface germen quasi-homogeneous* $(\{z^2 + \varphi(x, y) = 0\}, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$*, where* φ *defines a singular curve flat without distinguished part and* $\nu_0(\varphi) \geq 2$*, cuspidal surface germ. Also we describe the topology of the exceptional divisor.*

key words: *Resolution of singularities.*

Introducción

La existencia de resoluciones inmersas, en las que se preserva la información de la inmersión de la variedad singular en una variedad lisa, ha sido obtenida (en un contexto más general que el de superficies). Pero la realización efectiva y la descripción de tales desingularizaciones plantean aún numerosos problemas, por ejemplo la determinación de resoluciones inmersas canónicas y la relación con la geometría intrínseca de la singularidad. En este artículo, **describiremos** brevemente un método de resolución inmersa para superficies sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

Queremos destacar que nuestro objetivo no es probar la existencia de una resolución inmersa (este es bien conocido, incluso en casos muy generales, ver [**Hi**],[**CGO**]), más bien dar una descripción explícita de la resolución inmerssa de un germen de superficie cuspidal, siguiendo el esquema de [**Gs**] y [**C**]. En estas referencias se plasma los argumentos y técnicas de O. Zariski, H. Hironaka, S. Abhyankar entre otros.

Generalidades

Sea S un germen de superficie compleja dada localmente, alrededor de un punto $p \in S$, U_p, con coordenadas analíticas (x, y, z) en donde $p = (0, 0, 0)$, por $(f(x, y, z) = 0)$; con $f \in \mathcal{O}(U_p)$ sin factores multiples y que admite un desarrollo en serie convergente

$$f(x, y, z) = \sum f_{ijk} x^i y^j z^k.$$

Llamamos multiplicidad de S en p, y lo denotamos por $\nu_p(S)$ al

$$\nu_p(S) := min\Big\{i + j + k : f_{ijk} \neq 0\Big\}.$$

Observe que para todo $p \in S$, $\nu_p(S) \geqq 1$. Diremos que p es un punto singular de S siempre que $\nu_p(S) \geq 2$. El conjunto de puntos singulares de $S, \mathrm{Sing}(S)$, es un conjunto analítico tal que la $\dim(\mathrm{Sing}(S)) \leq 1$, es decir, está formado por una cantidad finita de curvas y puntos aislados.
La multiplicidad define una función semicontinua superiormente, esto es, los puntos de multiplicidad superior a una dada forman un cerrado analítico del espacio ambiente.
Sea

$$d = \text{máx}\Big\{\nu_p(S) : p \in \mathrm{Sing}(S)\Big\},$$

en [**C**], d es llamado el ***invariante de Samuel*** y denotado por $\mathrm{ISam}(S)$. Así, el conjunto formado por todos los puntos de multiplicidad máxima, ***estrato de samuel*** de S, denotado por

$$\mathrm{Sam}(S) = \Big\{p \in \mathrm{Sing}(S) : \nu_p(S) = d\Big\}$$

es un cerrado analítico de S.

Definición 1. Una ***resolución o desingularización*** de S es un morfismo propio $\pi : \widetilde{S} \to S$ tal que

1. $\widetilde{S}$ es una superficie lisa,
2. $\widetilde{S} \smallsetminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, S)$ es denso en $\widetilde{S}$, y
3. La restricción $\pi : \widetilde{S} \smallsetminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, S) \longrightarrow S \smallsetminus \{\mathrm{Sing}\, S\}$ es un isomorfismo.

Dada una inmersión de S en una variedad lisa V, $S \hookrightarrow V$.

Definición 2. Se llama ***resolución inmersa*** de S a un morfismo propio

$$\pi : \widetilde{V} \to V$$

tal que

1. $\widetilde{V}$ es una variedad lisa,
2. $\widetilde{V} \smallsetminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, S)$ es denso en $\widetilde{V}$,
3. la restricción $\pi : \widetilde{V} \smallsetminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, S) \longrightarrow V \smallsetminus \{\mathrm{Sing}\, S\}$ es un isomorfismo, y
4. π induce una resolución de S con cruzamientos normales.

Así, tenemos $\pi^{-1}(S) = \widetilde{S} \cup D_1 \cup \cdots \cup D_r$, una descomposición en componentes irreducibles de $\pi^{-1}(S)$, , y el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\overline{\pi^{-1}(S \smallsetminus \{\mathrm{Sing}\, S\})} = \widetilde{S} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi|_{\widetilde{S}}"'] & \widetilde{V} \arrow[d, "\pi"] & \pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, S) = D_1 \cup \cdots \cup D_r \arrow[l, hook'] \\
S \arrow[r, hook] & V &
\end{tikzcd}$$

es divisor de $\widetilde{V}$, llamado el ***divisor excepcional*** de π.

Además, de la condición de cruzamientos normales obtenemos las siguientes propiedades:

1. Por cada punto $p \in \pi^{-1}(\operatorname{Sing} S) \cap \widetilde{S}$ pasan a lo sumo dos componentes irreducibles de $\pi^{-1}(\operatorname{Sing} S)$, pues $\widetilde{S}$ es una variedad de dimensión dos.
2. Las componentes irreducibles de la fibra excepcional $\pi^{-1}|_{\widetilde{S}}(\operatorname{Sing} S)$ de la restricción $\pi|_{\widetilde{S}}$ son lisas y con cruzamientos normales en $\widetilde{S}$. La resolución de S inducida por π es lo que se llama una ***buena resolución*** de S.

Nota 1. Las definiciones precedentes han sido dadas en el contexto analítico complejo. Definiciones análogas existen en el contexto algebraico (ver [**CGO**]).

Una clase especial de morfismos propios son las que se construyen por medio de explosiones con centros subvariedades lisas.

Uno de los métodos efectivos para el cálculo de una resolución **inmersa**, reposa en la utilización de explosiones con centro puntos o curvas lisas en las que la superficie considerada es singular, o bien donde existe tangencia de un transformado estricto de esta con los divisores excepcionales generados por explosiones anteriores. Los centros de las explosiones son subvariedades de la superficie, pero las explosiones son realizadas en la variedad ambiente. Los centros de explosión que inducen una buena resolución de la superficie son elegidos de acuerdo a la definición de centro permitido que a continuación precisamos.

Sea $S \subset V \simeq (\mathbb{C}^3, p)$ un germen de superficie analítica. Un subespacio analítico $C \subset V$ es un ***centro permitido*** para S si es no singular y la multiplicidad de S es constante a lo largo de C. En particular, si C interseca a $\operatorname{Sam}(S)$, C está totalmente contenido en $\operatorname{Sam}(S)$.
Utilizaremos, de manera canónica, centros permitidos en el proceso de la resolución o desingularización de S mediante explosiones.

Definición 3. El ***cono tangente*** $CT_p(S)$ de S en p, está dado por la forma inicial de f, es decir:

$$CT_p(S) = \operatorname{In}(f) := \left(\sum_{i+j+k=\nu_P(S)} f_{ijk} x^i y^j z^k = 0 \right).$$

Definición 4. El espacio ***tangente estricto de Hironaka*** de S en p es el sub-espacio lineal más grande T_pS de T_pV que deja invariante al cono tangente por traslaciones.

T_pS coincide con CT_pS, si y solo si $CT_p(S)$ es un espacio lineal. Salvo cambio lineal de coordenadas, la co-dimensión de $T_p(S)$ es el mínimo número de coordenadas necesarias para expresar la forma inicial; en general $T_p(S) \subset CT_p(S)$.

En [**C**] se tiene propiedades de $\operatorname{ISam}(S), \operatorname{Sam}(S), T_pV, T_pC$ después de explosiones con centros permitidos, así como la estrategia global de la resolución de superficies, que consiste en ir bajando poco a poco el invariante de Samuel de S mediante explosiones con centros permitidos, modificando en un momento u otro, todos los puntos del estrato de Samuel inicial. Después de introducir el concepto de contacto maximal e identificar un invariante que descienda estrictamente, al cabo de un número finito de etapas, y tal que no pueda descender infinitamente, es decir

dicho invariante se mantiene constante bajo explosiones. El proceso de resolución o desingularización de S finaliza (ver [**C**], [**CGO**]). Una vez obtenida dicha resolución, se podrá considerar la condición de transversalidad o de cruzamientos normales de los divisores excepcionales con el transformado estricto de la superficie.
Es posible que una componente irreducible del estrato de Samuel sea una curva singular y en cuyo caso el centro permitido estaría contenido en ella, es decir el centro permitido sería el punto singular de las curvas.
El estrato de Samuel tiene cruzamientos normales en un punto $p \in \mathrm{Sam}(S)$, siempre que se cumpla una de las consideraciones siguientes.

1. p es un punto aislado de $\mathrm{Sam}(S)$.

2. $\mathrm{Sam}(S)$ es una curva lisa, localmente en p.

3. $\mathrm{Sam}(S)$ consiste de dos curvas lisas y transversales en p.

El conjunto de puntos en los que $\mathrm{Sam}(S)$ no tiene cruzamiento normales es un conjunto finito de puntos aislados. Tomando como centros de explosión a estos puntos se tiene que $\mathrm{Sam}(\tilde{S})$ tiene cruzamientos normales (ver [**C**] Proposición 2).
El caso más "accesible" de superficies singulares para obtener una resolución inmersa, es el de las superficies con singularidades absolutamente aisladas. Para este tipo de superficies, se obtiene una resolución no inmersa por medio de transformaciones cuadráticas. Una vez obtenida dicha resolución, se podrá considerar la condición de transversalidad o de cruzamientos normales del divisor excepcional con el transformado estricto de la superficie.

Resolución inmersa de superficies cuspidales casi-homogéneas.

Consideramos una familia de superficies singulares del tipo

$$f = z^k + \varphi(x, y) = 0, \ k \geq 2$$

donde φ es una función analítica de dos variables. Este tipo de superficies fueron introducidas por O. Zariski y denominadas como ***superficies de Zariski*** por Piotr Blas en 1970. Estudiado con detalle en los años 70 por Joseph Blass, Piotr Blass y Jeff Lang. Existen estudios en el caso que φ sea una curva singular plana e irreducible, debido a Anne Pichon, Robert Mendris y András Némethi. Estamos interesados en el caso $k = 2$ y φ una curva singular plana no necesariamente irreducible, con la condición $\nu_0(\varphi) \geq 2$, a los que llamaremos ***superficies cuspidales***.

Definición 5. Sea $S \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ un germen de superficie con coordenadas (x, y, z). S será llamada **superficie cuspidal** si es definida por una ecuación analítica

$$f = z^2 + \varphi(x, y),$$

con la condición $\nu_0(\varphi) \geq 2$.

- Si f es una función analítica casi-homogénea, S es llamada una superficie **cuspidal casi-homogénea** (CCH).

Es fácil probar que existen coordenadas analíticas en las que una superficie cuspidal casi-homogénea $S \subset (\mathbb{C}^3, \mathbf{0})$, está definida por la ecuación

$$f = z^2 + \varphi(x,y) = z^2 + x^{n_1} y^{n_2} \prod_{i=1}^{l} \left(y^p - a_i x^q\right)^{d_i} = 0.$$

Donde $n_1, n_2 \geq 0$ y $d_i > 0$. Los números complejos a_i son no nulos y distintos dos a dos. Diremos que S es ***admisible*** si φ no admite parte distinguida, es decir, si la curva $(\varphi = 0)$ no admite a $x = 0$, $y = 0$ y/o a $xy = 0$ como ramas. En buenas coordenadas estas superficies están definidas por la ecuación

$$f(x,y,z) = z^2 + \prod_{i=1}^{l} \left(y^p - a_i x^q\right)^{d_i} = 0. \tag{1}$$

El lugar singular de S, $\mathrm{Sing}(S)$ es de uno de los tipos siguientes

I. *Si* $d_i = 1$ *para todo* $i = 1, \cdots, l$*:*

$$\mathrm{Sing}(S) = \big\{(0,0,0)\big\}.$$

II. *Si* $d_i > 1$ *para algún* $i = 1, \cdots, l$*:*

$$\mathrm{Sing}(S) = \left\{(x,y,0) \in (\mathbb{C}^3, 0) : y^p + a_i x^q = 0;\ d_i > 1\right\}.$$

En ambas situaciones, tenemos $\mathrm{ISam(S)} = 2$ y $\mathrm{Sam(S)} \equiv \mathrm{Sing}(S)$. Un método de resolución inmersa de las superficies cuspidales, puede ser visto en [**BMN**], allí los autores presentan una descripción explícita de una "resolución inmersa" de las superficies cuspidales normales, así como una descripción topológica del divisor excepcional, usando la estrategia de Jung. Sin embargo tal proceso, tiene un pequeño defecto: la restricción de la modificación birracional

$$\pi : M \setminus \pi^{-1}(\mathrm{Sing}(S)) \longrightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \setminus \mathrm{Sing}(S)$$

no es un isomorfismo y en consecuencia, π no cubre exactamente la definición de resolución inmersa que precisamos en estas notas. A continuación, describimos la resolución inmersa del modelo (1) siguiendo el esquema descrito en el capitulo anterior. Por comodidad, dividimos el proceso en tres etapas que acontinuación se describen brevemente (ver [**N**], para más detalles).

Sean $r = mcd(d_1, \cdots, d_l),\ \delta = mcd(p,q),\ p' = \frac{p}{\delta},\ q' = \frac{q}{\delta}$ y suponga $p \geq q \geq 2$. A partir del algoritmo de Euclides para (p', q').

$$\left\{\begin{array}{lcll} p' & = & c_0 q' + r_1 & \\ q' & = & c_1 r_1 + r_2 & \\ r_1 & = & c_2 r_2 + r_3 & \\ & \vdots & & \\ r_{i-1} & = & c_i r_i + r_{i+1}; & 0 \leq r_{i+1} < r_i \\ & \vdots & & \\ r_{N-2} & = & c_{N-1} r_{N-1} + r_N & \\ r_{N-1} & = & c_N r_N + 0. & \end{array}\right.$$

obtenemos el desarrollo en fracción continua de

$$\frac{p'}{q'} = c_0 + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 + \ddots \frac{1}{c_N}}}}.$$

Si $\frac{p_k}{q_k}$ es el $k-$ésimo aproximante, se verifica que

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{p_{k-1}c_k + p_{k-2}}{q_{k-1}c_k + q_{k-2}}.$$

Es clásico que se tiene la igualdad

$$p_{k-1}q_k - q_{k-1}p_k = (-1)^k. \tag{2}$$

En particular si $k = N$

$$p_{N-1}q' - q_{N-1}p' = (-1)^N,$$

y $m := q_{N-1}, n := p_{N-1}$ son enteros positivos minimales verificando

$$nq - mp = (-1)^N \delta.$$

Además, si $N = 0$, q divide a p.

Iniciamos el proceso de resolución realizando:

1º c_0 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente de las curvas $z = 0,\ y^p - a_i x^q = 0$

2º c_1 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente de las curvas $\tilde{z} = 0,\ \tilde{y}^{p-c_0q} - a_i\tilde{x}^q =\ \tilde{y}^{r_1\delta} - a_i\tilde{x}^q 0$

3º c_2 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente de las curvas $\tilde{z} = 0,\ \tilde{y}^{p-c_0q} - a_i\tilde{x}^{q-c_1r_1\delta} = \tilde{y}^{r_1\delta} - a_i\tilde{x}^{r_2\delta} = 0$

4º c_3 transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente de las curvas $\tilde{z} = 0,\ \tilde{y}^{r_3\delta} - a_i\tilde{x}^{r_2\delta} = 0$

$\vdots$

kº c_{k-1} transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente de las curvas:

$$\begin{cases} \tilde{z} = 0,\ \tilde{y}^{r_{k-1}\delta} - a_i\tilde{x}^{r_{k-2}\delta} = 0, & \text{si } k \text{ par;} \\ \tilde{z} = 0,\ \tilde{y}^{r_{k-2}\delta} - a_i\tilde{x}^{r_{k-1}\delta} = 0, & \text{si } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Finalmente realizamos c_k transformaciones cuadráticas siguiendo la dirección tangente de las curvas:

$$\begin{cases} \tilde{z} = 0,\ \tilde{y}^{r_{k-1}\delta} - a_i\tilde{x}^{r_k\delta} = 0, & \text{si } k \text{ par;} \\ \tilde{z} = 0,\ \tilde{y}^{r_k\delta} - a_i\tilde{x}^{r_{k-1}\delta} = 0, & \text{si } k \text{ impar.} \end{cases}$$

Tras las explosiones precedentes, se genera $k+1$ cadenas

$$\mathcal{C}_\nu : D_{s_{\nu-1}+1}, D_{s_{\nu-1}+2}, \cdots, D_{s_{\nu-1}+c_\nu} = D_{s_\nu}$$

con $s_\nu = \sum_{i=0}^{\nu} c_i$ para cada $\nu \in \{0, \cdots, k\}$.

Sea $\nu \in \{1, 2, \cdots, N\}$ y $j_\nu \in \{1, 2, \cdots, c_\nu\}$. Tomemos

$$\alpha = (\nu, j_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu-1} c_i + j_\nu.$$

Las explosiones anteriores tienen ecuación

$$\begin{cases} x_{\alpha-1} = x_\alpha \\ y_{\alpha-1} = x_\alpha y_\alpha, \\ z_{\alpha-1} = x_\alpha z_\alpha. \end{cases} \quad \text{si } \nu \text{ par}$$

ó

$$\begin{cases} x_{\alpha-1} = x_\alpha y_\alpha \\ y_{\alpha-1} = y_\alpha, \\ z_{\alpha-1} = y_\alpha z_\alpha. \end{cases} \quad \text{si } \nu \text{ impar}$$

Denotemos, en estas coordenadas, el punto

$$p_\alpha := D_{\alpha-1} \cap D_\alpha \cap (z_\alpha = 0).$$

Lema 6. Tras la secuencia de $\sum_{i=1}^{N} c_i$ transformaciones cuadráticas, la transformada estricta de la superficie S, en una vecindad del punto p_α, con coordenadas $(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, tiene ecuación,

$$S_\alpha = z_\alpha^2 + x_\alpha^{a_\alpha} y_\alpha^{b_\alpha} u_\alpha(x_\alpha, y_\alpha),$$

donde u_α es una unidad para todo $\alpha \neq s_N$ y a_α, b_α enteros positivos.

Demostración. ver [**N**]. □

Diremos que (S_α, p_α), es:

1. De tipo I, si ν es par y $\alpha \neq \sum_{i=1}^{N} c_i$.
2. De tipo II, si ν es impar y $\alpha \neq \sum_{i=1}^{N} c_i$.
3. De tipo III, si $\alpha = \sum_{i=1}^{N} c_i$.

Del Lema 6, las superficies del tipo I y II, definen superficies casi ordinarias cuyo lugar singular, está dado por líneas proyectivas localmente definidas por $z_\alpha = x_\alpha = 0$, $z_\alpha = y_\alpha = 0$. Por otro lado, las superficies del tipo III, tienen lugar singular formado por la línea proyectiva, localmente dado por

$$\begin{cases} \tilde{z} = \tilde{y} = 0, & \text{si } N \text{ par;} \\ \\ \tilde{z} = \tilde{x} = 0, & \text{si } N \text{ impar.} \end{cases}$$

junto con el conjunto de líneas $L_{\kappa i}$:

$$L_{\kappa i} = \begin{cases} \tilde{z} = 0 \\ & N - par \\ \tilde{x} = x_{\kappa i} \end{cases} \qquad L_{\kappa i} = \begin{cases} \tilde{z} = 0 \\ & N - impar \\ \tilde{y} = y_{\kappa i} \end{cases}$$

donde

$$\begin{array}{rclrcl} x_{i\kappa} & = & |\frac{1}{a_i}|^{\frac{1}{\delta}} \exp(\tilde{\beta}_\kappa), & y_{i\kappa} & = & |a_i|^{\frac{1}{\delta}} \exp(\beta_\kappa). \\ \\ \tilde{\beta}_\kappa & = & \frac{\tilde{\alpha}_i + 2\kappa\pi\sqrt{-1}}{\delta}, & \beta_\kappa & = & \frac{\alpha_i + 2\kappa\pi\sqrt{-1}}{\delta}. \\ \\ \tilde{\alpha}_i & = & \arg(\frac{1}{a_i}), & \alpha_i & = & \arg(a_i), \end{array}$$

para cada $i \in \{1, \cdots, l\},\ \kappa \in \{0, \cdots, \delta - 1\}$.

Como consecuencia del Lema 6, $\mathrm{Sam}(\tilde{S})$ tiene cruzamientos normales y

$$\mathrm{ISam}(\tilde{S}) = \mathrm{ISam}(S).$$

Además, es fácil ver que $\mathrm{ISam}(S') = 2$, $\mathrm{Sam}(S') = \Big\{d_\alpha, L_{i\kappa}\Big\} = \mathrm{Sing}(S')$, donde S' representa la trasformada estricta de S después de las $k = \sum_{i=1}^{s_N}$ transformaciones cuadráticas.

La **segunda etapa** de la desingularización de S, depende de la naturaleza de los enteros a_α, b_α y esta de la naturaleza de p, q y d. La desingularización es muy simple, como la de las curvas planas, con centros de explosión las líneas d_α. A continuación analizamos los casos especiales y nos restringimos al caso N impar:

Caso i. Supongamos d par, entonces las superficies del tipo I, II se resuelven, con cruzamientos normales, después $\frac{a_\alpha + b_\alpha}{2}$ transformaciones monoidales

- $\frac{a_\alpha}{2}$ a lo largo de la línea $x_\alpha = z_\alpha = 0$ y
- $\frac{b_\alpha}{2}$ a lo largo de la línea $y_\alpha = z_\alpha = 0$, en las coordenadas antes definidas.

La **tercera etapa** de la resolución, está dedicada a resolver las superficies del tipo III. Observe que después de la segunda etapa, estas superficies han sido "parcialmente" resueltos y que en coordenadas adecuadas las modificaciones son representadas por las ecuaciones

$$\widetilde{S}_i = \Big\{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{t}) : \tilde{t}^2 + \prod_{i=1}^{l}\left(\tilde{y}^{\delta} - a_i\right)^{d_i} = 0\Big\},$$

$$\widehat{S}_i = \Big\{(x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + \prod_{i=1}^{l}\left(1 - a_i x_\alpha^{\delta}\right)^{d_i} = 0;\ \alpha = s_{_N}\Big\},$$

Estás superficies tienen como lugar singular $\mathcal{L} = \bigcup L_{i\kappa}; d_i > 1$ y su resolución inmersa sigue el esquema de la reducción de singularidades de las curvas planas cuspidales $\mathcal{C}_i = (t^2 + Y^{d_i} = 0) \subset U_i \approx (\mathbb{C}^2, 0)$, U_i es un entorno del punto de intersección de la línea $L_{i\kappa}$ con el divisor excepcional.

Después de reducir las curvas $\mathcal{C}_i$, con cruzamientos normales. La componente del divisor excepcional que interseca a la superficie $\widetilde{S}_i \cup \widehat{S}_i$ es modificada, a ésta modificación, en [**BMN**], es llamada superficie reglada no-minimal, este será descrito más adelante.

Caso ii. Supongamos d impar:

- Si p, q son par. Este caso se reduce al caso i.
- Si p par y q impar (o viceversa). Entonces, para $\nu \in \{1, 3, \cdots, N\}$, a_α, b_α son par, b_{s_N} es impar y para $\nu \in \{0, 2, \cdots, N-1\}$, a_α, b_α o bien son todos par, o bien alternados.
- Si p, q son impar, entonces a_{s_N} es impar, $b_{s_N}, \tilde{b}_{s_N}$ dependen de los enteros mínimos m, n tales que $mp - nq = \delta$ y a_α, b_α dependen de la naturaleza de $j_\nu p_{\nu-1} + p_{\nu-2}, j_\nu q_{\nu-1} + q_{\nu-2}$ respectivamente.

Nosotros destacamos los siguientes casos:

Caso ii.1 Suponga p par y q impar y a_α, b_α alternados para cada $\nu \in \{0, 2, \cdots, N-1\}$. Iniciamos el proceso de resolución tal como en el caso i: $\frac{P}{2}$ transformaciones monoidales a lo largo de d_{s_N}, a continuación resolvemos las superficies del tipo II tras $\frac{a_\alpha + b_\alpha}{2}$ transformaciones monoidales, tal como en el caso i. Ahora pasamos a resolver las superficies del tipo I. Por comodidad, explotamos las curvas d_α para los cuales a_α, b_α son par y finalmente realizamos $\frac{a_\alpha+3}{2}$ (respectivamente $\frac{b_\alpha+3}{2}$) transformaciones monoidales a lo largo de d_α para los cuales a_α (respectivamente b_α) es impar. Obteniendo una resolución inmersa de las superficies del tipo I. La descripción del divisor excepcional en está etapa, será descrito más adelante.

La tercera etapa de la resolución, en este caso, es dedicada a resolver las modificaciones de las superficies del tipo III, tras la segunda etapa. Estas modificaciones, en coordenadas adecuadas están dadas por:

$$\Big\{(\tilde{x},\tilde{y},t) : \tilde{y}t^2 + \prod_{i=1}^{l}\left(\tilde{y}^{\delta} - a_i\right)^{d_i} = 0\Big\},$$
$$\Big\{(x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + \prod_{i=1}^{l}\left(1 - a_i x_\alpha^{\delta}\right)^{d_i} = 0;\ \alpha = s_{_N}\Big\},$$

Estás superficies tiene como lugar singular $\mathcal{L} = \bigcup L_{i\kappa}; d_i > 1$ y su resolución inmersa es exactamente igual al caso i.

Caso ii.2 Suponga $p, q, b_{s_N}, \tilde{a}_{s_N}, a_\alpha, b_\alpha$ impares. En este caso, para cada α con $i \in \{0, 1, \cdots, N\}$ realizamos, $\frac{a_\alpha + b_\alpha - 2}{2}$ transformaciones monoidales

- $\frac{a_\alpha - 1}{2}$ a lo largo de la línea $x_\alpha = z_\alpha = 0$ y
- $\frac{b_\alpha - 1}{2}$ a lo largo de la línea $y_\alpha = z_\alpha = 0$

exactamente igual como en el caso i. Tras este proceso, existen coordenadas locales (x_α, y_α, t) tales que las transformadas estrictas de S_α representan superficies cónicas tangente a los ejes x_α, y_α:

$$\widetilde{S}_\alpha = \big\{(x_\alpha, y_\alpha, t) : t^2 + x_\alpha y_\alpha u_\alpha = 0\big\}.$$

A continuación realizamos, en cada sistema coordenado, una transformación cuadrática con centro el origen de coordenadas. Las transformadas estrictas de $\widetilde{S}_\alpha$, en coordenadas adecuadas, vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} z_{\alpha 1}^2 + y_{\alpha 1} u(x_\alpha, x_\alpha y_{\alpha 1}) = 0 \\ z_{\alpha 2}^2 + x_{\alpha 2} u(x_{\alpha 2}, y_\alpha) = 0. \end{array}$$

Notemos que ahora, las transformadas estrictas son tangente a la línea proyectiva de ecuación local $x_\alpha = y_{\alpha 1} = 0$ (respectivamente a la línea proyectiva de ecuación local $y_\alpha = x_{\alpha 2} = 0$). Con el fin de tener cruzamientos normales, es necesario realizar, en un orden adecuado (ver [**N**]), dos transformaciones monoidales a lo largo de la línea proyectiva, localmente dada por $z_{\alpha 1} = y_{\alpha 1} = 0$ (respectivamente $z_{\alpha 2} = x_{\alpha 2} = 0$) para todo $\alpha \neq s_N$. Obteniendo de está manera una resolución inmersa de las superficies de tipo I y II.
La tercera etapa, en este caso, está dedicada a resolver las modificaciones de las superficies de tipo III después de la etapa anterior; que en coordenadas adecuadas,están representadas por:

$$\begin{aligned} S^1 :=& \quad t^2 + x \prod_{i=1}^{l} \left(y^\delta - a_i\right)^{d_i} = 0 \\ S^2 :=& \quad t^2 + y \prod_{i=1}^{l} \left(1 - a_i x^\delta\right)^{d_i} = 0. \end{aligned}$$

La resolución inmersa de S, se obtiene después de resolver, con cruzamientos normales, las superficies S^1, S^2 (ver [**N**] para más detalles).

Descripción del divisor excepcional

Las componentes irreducibles, del divisor excepcional, son superficies racionales en el caso de que provengan de transformaciones cuadráticas, o superficies regladas si provienen de transformaciones monoidales. Para describirlas, es necesario un conocimiento previo de herramientas de la Geometría Algebraica (propiedades y construcción de superficies racionales y regladas). El detalle de esto conllevaría desviarnos del tema, por tal motivo remitimos al lector interesado a [**Ha**] como una bibliografía general (ver también [**F**]).

El divisor excepcional E, producido en la resolución inmersa de las superficies cuspidales casi-homogéneas, es una unión $E = E_1 \cup E_2$, donde E_1 (respectivamente E_2) es unión de componente excepcionales irreducibles creado en la etapa primera (respectivamente segunda y tercera) de la resolución. Cada E_i es unión de superficies racionales, birracionalmente equivalentes a una superficie reglada sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, entonces de [**Ha**] (Proposición 2.2 pág. 370) y [**Gk**] (Teorema 2.1), cualquier componente de E_i es de la forma $\mathbb{P}\big(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n)\big)$ para algún entero $n \geq 0$. Habitualmente la superficie $\mathbb{P}\big(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(n)\big)$ es denotado por Σ_n y llamado la $n-$ésima superficie de Hirzebruch. Una referencia general para superficies regladas es [**Ha**].

El divisor excepcional E_1 resulta de $s_{_N}$ transformaciones cuadráticas y es unión

$$E_1 = \bigcup_{\alpha=1}^{s_N} D_\alpha,$$

donde, cada D_α es de la siguiente forma:

- Para cada $\alpha = s_{i-1} + j_i \neq s_i, i \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$. D_α es el resultado de la explosión, con centro un punto de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Las fibras del morfismo inducido a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ son las transformaciones propias de las líneas pasando por el centro de explosión, así todas las fibras son $\approx \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, la curva excepcional corta de manera transversal, en un único punto, a cada fibra y por tanto es una sección con autointersección -1, en consecuencia

$$D_\alpha \approx \Sigma_1 = \mathbb{P}\big(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)\big), \text{ (ver [\textbf{Ha}] pág. 374)}$$

- Las componentes D_{s_i} para cada $i \in \{0, 1, \cdots, N-2\}$, resulta de realizar $c_{i+1} + 1$ transformaciones cuadráticas (explosiones de $c_{i+1}+1$ puntos de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$). Después de realizar transformaciones elementales (ver [**F**] pág. 114), obtenemos

$$D_{s_i} \approx \Sigma_{e_i} = \mathbb{P}\big(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(e_i)\big); \text{ para algún } e_i \in \mathbb{Z}.$$

- $D_{s_{N-1}}$ resulta de realizar $c_{_N}$ transformaciones cuadráticas (explosiones de $c_{_N}$ puntos en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$). Análogamente como en el item anterior

$$D_{s_{N-1}} \approx \Sigma_e = \mathbb{P}\big(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(e)\big); \text{ para algún } e \in \mathbb{Z}.$$

- $D_{s_N} = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

La construcción de E_2 resulta de una serie de transformaciones monoidales con centro las líneas $d_\alpha = D_\alpha \cap S_\alpha \approx \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Del Lema 6, para cada punto

$$p_\alpha = D_{\alpha-1} \cap D_\alpha \cap \{z_\alpha = 0\}$$

existen coordenadas locales en una vecindad de p_α, U_α, tal que

$$\pi^*(S) \cap U_\alpha = \Big\{(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) : z_\alpha^2 + x_\alpha^{a_\alpha} y_\alpha^{b_\alpha} u_\alpha = 0\Big\},$$

donde $u_\alpha \in \mathbb{C}\{x_\alpha, y_\alpha\}$ es una unidad para todo $\alpha \neq s_{_N}$.

El divisor excepcional E_2 es una unión

$$E_2 = \bigcup_{\alpha,j} D_{\alpha j},$$

donde cada $D_{\alpha j}$ son superficies de Hirzebruch, cuya construcción depende de la naturaleza de los enteros positivos a_α, b_α. Destacamos los Casos **i, ii.1, ii.2** descritos anteriormente.

En el **Caso i**, al realizar $\frac{b_{\alpha+1}}{2} = \frac{a_\alpha}{2}$ transformaciones monoidales a lo largo de la curva d_α, para cada α, se crea una torre de superficies regladas.Los segmentos verticales de contacto entre las superficies proyectivas denotan curvas racionales. Los enteros $a|b$ denotan el número de auto-intersección de estas curvas en las dos superficies correspondientes.

Por otro lado al explotar la curva d_{s_N}, $\frac{a_{s_N}}{2}$ veces, existe una vecindad $\hat{U}$ con coordenadas $(t, \hat{x}, \hat{y})$ tal que

$$\hat{S} := \pi^*(S) \cap \hat{U} = \left\{(t, \hat{x}, \hat{y}) : t^2 + \prod_{i=1}^{l} \left(\hat{y}^\delta - a_i\right)^{d_i} = 0\right\}.$$

$\hat{S}$ es una superficie con lugar singular

$$\mathrm{Sing}(\hat{S}) = \bigcup L_{i\kappa}$$

cuya resolución depende de la naturaleza de los enteros d_i y es equivalente a la resolución de la curva

$$\hat{C} := \left\{(t, \hat{y}) : t^2 + \prod_{i=1}^{l} \left(\hat{y}^\delta - a_i\right)^{d_i} = 0\right\} \subset \Sigma^m_{|l_1^{s_N} e_{s_N} - x_{s_N}|}$$

con conjunto singular

$$\mathrm{Sing}(\hat{C}) = \left\{(0, a_{i\kappa}) : 1 \leq i \leq l;\ 0 \leq \kappa \leq \delta - 1\right\} \subset C_1^m,$$

donde $C_1^m \subset \Sigma^m_{|l_1^{s_N} e_{s_N} - x_{s_N}|}$ tiene auto-intersección

$$(C_1^m)^2 = l_1^{s_N} e_{s_N} - x_{s_N} - l_1^{s_N - 1}.$$

Entorno de cada punto singular $p_{i\kappa} = (0, a_{i\kappa})$, la curva es definido por

$$f_{i\kappa} = t^2 + (y - a_{i\kappa})^{d_i} g_{i\kappa}.$$

Fijamos la superficie reglada

$$\pi : \Sigma^m_{|l_1^{s_N} e_{s_N} - x_{s_N}|} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$$

y el conjunto de puntos $\{q_{i\kappa}\}$ sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ y sea $p_{i\kappa} \in \mathrm{Sing}\,\hat{C}$ el único punto sobre C_1^m con $\pi(p_{i\kappa}) = q_{i\kappa}$. Consideremos las coordenadas locales $(t_{i\kappa}, y_{i\kappa})$ en una vecindad $U_{i\kappa}$ de $p_{i\kappa}$ con $\{t_{i\kappa} = 0\} = C_1^m \cap U_{i\kappa}$. En $U_{i\kappa}$ tenemos las curvas $C_{i\kappa} = \{t_{i\kappa}^2 + y_{i\kappa}^{d_i} g_{i\kappa} = 0\}$. Entonces realizamos una secuencia de explosiones de modo que la transformada total de $C_{i\kappa} \cup C_1^m$ formen un divisor con cruzamientos normales. Tenemos los siguientes casos. Si $d_i = 1$, para algún i, entonces $C_{i\kappa} = \{t_{i\kappa}^2 + y_{i\kappa} g_{i\kappa} = 0\}$ intercepta de manera transversal a C_1^m y por tanto no es necesario realizar explosiones. Si d_i es par, entonces necesitamos $\frac{d_i}{2}$ explosiones. Finalmente, si $d_i \geq 3$ es impar, entonces son necesarias $\frac{d_i+3}{2}$ explosiones. Este proceso lo realizamos para cada $1 \leq i \leq l$ y $0 \leq \kappa \leq \delta - 1$. Tras estas secuencia de explosiones $\Sigma^m_{|l_1^{s_N} e_{s_N} - x_{s_N}|}$ es modificado, denotamos a está modificación por $\widetilde{\Sigma}^m_{|l_1^{s_N} e_{s_N} - x_{s_N}|}$. Esta superficie con la proyección

$$\pi^{d_i} : \widetilde{\Sigma}^m_{|l_1^{s_N} e_{s_N} - x_{s_N}|} \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}},$$

donde $\pi^{d_i} = \pi \circ$ (secuencia de explosiones según naturaleza de d_i).

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{C_0^m}\right)^2 &= -1 - l_2^{s_N} = -1 - \tfrac{P}{2}. \\
\left(\widetilde{C_1^m}\right)^2 &= 1 + l_2^{s_N} - l_1^{s_{N-1}} - l_1^{s_N} - \sum_{\substack{d_i - par \\ i,\kappa}} \frac{d_i}{2} - \sum_{\substack{d_i - impar \geq 3 \\ i,\kappa}} \frac{d_i + 1}{2}; \\
&= 1 + \tfrac{P}{2} - \tfrac{Q}{2} - l_1^{s_N} - \sum_{\substack{d_i\ par \\ i,\kappa}} \frac{d_i}{2} - \sum_{\substack{d_i\ impar \geq 3 \\ i,\kappa}} \frac{d_i + 1}{2}.
\end{aligned}$$

Los **casos ii.1, ii.2** son análogos ver [**N**].

Conclusiones y Problemas

1. Es posible construir una resolución inmersa de una superficie sin modificar bruscamente el espacio ambiente.
2. Podemos conocer explicitamente la geometría del divisor excepcional así como la geometría de la transformada estricta de las superficies cuspidales.
3. Después de construir un germen de 1-forma diferencial que admita a $z^2 + \varphi(x, y) = 0$ como separatriz, es posible clasificarlas analíticamente. (ver [**N**]).
4. Después de conocer la resolución inmersa de $S : z^k + \varphi(x, y) = 0$ ¿Será posible construir un un germen de 1-forma diferencial ω, que admita a S como separatriz y clasificarlas analiticamente?, en los casos siguientes.
   - Caso $k = 2$, y ω no necesariamente de tipo superficie generalizada.
   - Caso $k \geq 3$ y ω de tipo superficie generalizada.
   - Caso $k \geq 3$ y ω no necesariamente de tipo superficie generalizada.

Referencias

[A] S. ABHYANKAR. *On ramification of algebraic functions.* Amer. J. Math. 77(1955). 575-592.

[BMN] C. BAN, L. J. MCEWAN & A. NÉMETHI.*The embedded resolution of* $f(x, y) + z^2 : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$.Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 38 (2001), 51-71.

[BPV] BARTH, W., PETERS, C. AND VAN DE VEN, A.*Compact Complex Surfaces*. Springer-Verlag 1984.

[C] F. CANO.*Introducción a la Geometría Analítica Local.* Departamento de Ciencias, Sección Matemáticas. Pontificia Universidad Católica del Perú.

[CGO] V. COSART, J. GIRAUD AND U. ORBANZ, *Resolution of surfaces singularities.* Lecture Notes in Mathematics, 1101, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1984. MR 87e:14032.

[F] R. FRIEDMAN. *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*. Springer Verlag 1998.

[Ga] Y.-N. GAU.*Embedded topological classification of quasi-ordinary singularities*. Men. Amer. Math. Soc. 74 (1988), 109-129

[Gs] G. GONZALES-SPRINBERG, G. (1991). *Quelques descriptions de désingularisations plongées de surfaces.* Kodai Math. J. 14(2), 1991, 181-193.

[Gk] A. GROTHENDIECK. *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*. Aw. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[Ha] R. HARTSHORNE. *Algebraic Geometry*. Graduate text in Mathematic 52. Springer Verlag 1977.

[Hi] H. HIRONAKA.*Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II*. Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109-203, 205-326. MR 33 # 7333.

[L1] J. LIPMAN.*Quasi-ordinary singularities of embedded surfaces*. Ph.D. Thesis, Harvard University, 1965.

[L2] J. LIPMAN.*Quasi-ordinary singularities of surfaces in* $\mathbb{C}^3$. Singularities (Proc. Symp. PureMath. 40), Amer. Math. Soc. Providence 1983, Part 2, 161-171.

[L3] J. LIPMAN.*Topological invariants of quasi-ordinary singularities*. Mem. Amer. Soc. 74 (1988), 1-107.

[N] Neciosup, H.*Clasificación analítica de ciertas foliaciones cuspidales casi-homogéneas en dimensión 3*. PhD Thesis, Universidad de Valladolid y Pontificia Universidad Católica del Perú.

[P] A. PICHON. *Singularities of complex surfaces with equations* $z^k + f(x; y) = 0$.Math. Res. Notices (1997), no. 5, 241-246.

[S] K. SAITO. *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields.* J. Fac. Sci. Tokyo 27 (1980), no. 2, 265.291.

[Z] O. ZARISKI, *On the problem of existence of algebraic functions of two variables possesing a given branch curve*. Amer. J. Math. 51 (1929), 305-328.