Obtención de ciclos límite con el método de averaging vía grado de Brouwer

Mag. Joel Mendoza Jimenez
Dpto. de matemáticas Pontificia Universidad Católica del Perú.

Resumen

En este artículo, se estudia la manera de encontrar ciclos límite, es decir órbitas periódicas aisladas, mediante el método del promedio vía grado de Brouwer, se prueba que el problema de encontrar órbitas periódicas es equivalente a encontrar ceros de alguna función adecuada, es aquí en la busqueda de los ceros donde la teoría del grado de Brouwer cumple un papel fundamental.
***Palabras clave**: Método de averaging, ciclos límite, grado de Brouwer, soluciones T-periódicas*

Abstract

In this article, we study how to find limits cycles, i.e. isolated periodic orbits, through averaging method via Brouwer degree, it is proved that the problem of finding periodic orbits is equivalent to finding zeros of some suitable function, here in the finding of the zeros where the Brouwer degree theory plays a key role.
Palabras clave: Método de averaging, ciclos límite, grado de Brouwer, soluciones T-periódicas

Introducción

El método de averaging [5, 6] da una relación cuantitativa entre las soluciones de un sistema diferencial no autónomo y el sistema diferencial promediado, el cual es un sistema diferencial autńomo. La versión moderna usa la teoría de grado de Brower, [1], la que relaciona el número de soluciones periódicas aisladas, ciclos límite de un sistema diferencial cuyo campo vectorial depende de un parámetro pequeño $\epsilon > 0$ y el número de ceros de una función adecuada, de esta manera el problema de encontrar órbitas periódicas es equivalente a encontrar ceros de alguna función definida en espacios de dimensión finita.

A grandes rasgos, el método de averaging es válida ya que si se tiene un centro y se toma una sección transversal a este, luego se perturba el centro esta sección continua siendo transversal, (la propiedad de ser transversal es estable mediante pequeñas perturabaciones), es a aquí donde se toma la serie de Maclaurin de la aplicación del primer retorno de Poincaré del sistema, cada punto fijo de esta aplicación nos brinda una órbita periódica, puesto que se desea órbitas periódicas aisladas se toma la sección transversal compacta.

Se trabaja con sistemas diferenciales de la forma

$$x' = f(t, x, \epsilon), \tag{1}$$

donde

- $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ y D es un subconjunto abierto y acotado.
- $t \in \mathbb{R}, t > 0.$

- $\epsilon > 0$ es un parámetro pequeño.
- f es localmente Lipschitz con respecto a x.

Para aplicar el método de averaging es necesario que f pueda expresarse en su forma estándar, es decir:

$$f(t, x, \epsilon) = \epsilon F(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon). \tag{2}$$

Materiales y métodos

Grado de Brouwer

La diferencia entre el método de averaging clásico y el método de averaging moderno radica en la manera de obtener los ceros de cierta función. La teoría de grado de Brower , ver por ejemplo [2], es una herramienta fundamental en la busqueda de ceros de ecuaciones del tipo

$$f(x) = p. \tag{3}$$

Definición 0.1. *(Grado de Brower para funciones de clase C^1) Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado, $f : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$ tal que $f \in C^1(\overline{V})$, además $Z_f = \{x \in \overline{V} | J_f(x) = 0\}$, sea $p \notin f(\partial V) \cup f(Z_f)$. Se define el **Grado de Brower de** f en p relativo a V como:*

$$d_B(f, V, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} sgn(J_f(x)),$$

donde la función signo está definida por sgn:

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ -1 & , \quad t < 0 \end{cases}$$

Observación 1. Sea $f : D \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 donde $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, $a \in D$ y $f(a) = 0$. Si se tiene que $J_f(x) \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe un abierto V con $a \in V$ tal que $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{V} \setminus \{a\}$, esto asegura que $d_B(f, V, 0) \in \{1, -1\}$.

Teorema 1. *Sea $\phi \in C^1(\overline{D})$.*
1.- *$d(\phi, D, p)$ es constante en cada componente de $\mathbb{R}^n \setminus \phi(\partial D)$.*
2.- *Si $p \notin \phi(\partial D)$, existe $\epsilon > 0$ dependiendo de p y ϕ tal que $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, p)$ siempre que $|\phi - \psi|_1 < \epsilon$.*
3.- *Sea $H(x, t)$ una homotopía de clase C^1 entre ϕ y ψ. Si $p \notin H(\partial D, t)$ $\forall t \in [0, 1]$, entonces $d(\phi, D, p) = d(\psi, D, q)$.*

Demostración. See [2, Pg. 16] □

Definición 0.2. *(Grado de Brower para funciones continuas) Sea $\phi \in C(\overline{D})$ y $p \notin \phi(\partial D)$. Se define $d(\phi, D, p) := d(\psi, D, p)$, donde $\psi \in C^1(\overline{D})$ satisface*

$$|\phi(x) - \psi(x)| < \rho(p, \phi(\partial D)); \ x \in \overline{D}$$

Ejemplo 1. El grado de Brouwer de la función $f(x) = x^2$ en cualquier vecindad del origen es cero.

En efecto: f solo tiene un cero y este se da cuando $x = 0$, además $f'(0) = 0$, luego no es posible aplicar la definición 0.1 para obtener el grado de Brower de f en $x = 0$, por ello se considera la función $g(x) = x^2 - \lambda^2$ donde λ es un número positivo arbitrario y g está definida en $V = (-2\lambda, 2\lambda)$, entonces g tiene dos ceros: λ y $-\lambda$, además $g'(\lambda) = 2\lambda > 0$ y $g'(-\lambda) = -2\lambda < 0$. Entonces por 1 y 0.2, se tiene que:

$$d_B(f, V, 0) = d_B(g, V, 0) = 0$$

.

Lema principal

El siguiente lema, (ver [1]), es el resultado más importante de esta sección. De este lema se desprende el método de averaging mediante grado de Brower.

Lema 0.1 (Lema principal)**.** *Sea V un subconjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, sean las funciones continuas $f_i : \overline{V} \to \mathbb{R}^n$, para $i = 0, ..., k$ y $f, g, r : \overline{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0] \to \mathbb{R}^n$ dadas por*

$$\begin{aligned} g(\cdot, \epsilon) &= f_0(\cdot) + \epsilon f_1(\cdot) + \epsilon^2 f_2(.) + ... + \epsilon^k f_k(\cdot) &(4)\\ f(\cdot, \epsilon) &= g(\cdot, \epsilon) + \epsilon^{k+1} r(\cdot, \epsilon), &(5)\end{aligned}$$

además se asume que $0 \notin f(\partial V, \epsilon)$, y

$$g(z, \epsilon) \neq 0 \textit{ for all } z \in \partial V, \epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]\backslash\{0\}, \qquad (6)$$

entonces para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeño $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0)$ está bien definido y $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \epsilon), V, 0)$.

Demostración. Para la prueba se usa el teorema 1, el cual garantiza la invarianza del grado de Brouwer mediante homotopías.

Para cada $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]\backslash\{0\}$, se considera

$$g_t(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + t(f(\cdot, \epsilon) - g(\cdot, \epsilon)), \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Ahora todo lo que se tiene que probar es que cuando ϵ es suficientemente pequeño $0 \notin g_t(\partial V, \epsilon)$. Se procede por contradicción, es decir para algún $t_0 \in (0, 1]$ y algún $x_0 \in \partial V$, se tiene que $g_{t_0}(x_0, \epsilon) = 0$. Sea $M > 0$ tal que $|r(z, \epsilon)| \leq M \ \forall z \in \overline{V}$ y cada $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, ($M$ existe desde que el dominio de r es un subconjunto compacto y r es continua). Entonces

$$0 = g(x_0, \epsilon) + t(f(x_0, \epsilon) - g(x_0, \epsilon))$$

Así

$$g(x_0, \epsilon) = -t\epsilon^{k+1} r(z_0, \epsilon),$$

como $|t| \leq 1$ se tiene

$$|g(x_0, \epsilon)| \leq M\epsilon^{k+1}$$

esto es una contradicción desde que para ϵ suficientemente pequeño $g(x_0, \epsilon) = 0$ y $|g(x_0, \epsilon)| = |f_0(x_0) + \epsilon f_1(x_0) + \cdots + \epsilon^k f_k(x_0)| \neq 0$. Por lo tanto el lema ha sido probado. □

Observación 2. Se asume que la hipótesis del lema 0.1 son satisfechas para $k = 0$, and y además que

- Para cada $a \in D$ con $f_0(a) = 0$, existe una vecindad V de a tal que $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$

Desde que $f_0(z) \neq 0 \, \forall z \in \overline{V} \setminus \{a\}$, por el teorema de escisión del grado, (ver página 26 de [2]), se deduce que $d_B(f_0, V_\mu, 0) \neq 0$ para cada vecindad $V_\mu \subset V$ de a. Es posible elegir a_ϵ tal que $a_\epsilon \to a$ cuando $\epsilon \to 0$.

Método clásico del promedio de primer oren

Aquí se presenta el método del promedio de primer orden en su versión clásica.

Teorema 2. *Se considera el siguiente sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \tag{7}$$

donde $F_1 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ *son funciones continuas, T-periódicas en la primera variable y* D *es un subconjunto abierto* $\mathbb{R}^n$. *Se define* $f_1 : D \to \mathbb{R}^n$ *como:*

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds \tag{8}$$

y se asume que:

(a) F_1, R, $D_x F$, $D_x^2 F$, $D_x R$ *son definidas, continuas y acotadas por una constante* M *(independente de* ϵ*) en* $D \times [0, \infty)$*;* $-\epsilon_f < \epsilon < \epsilon_f$.

(b) *Sea* $a \in D$ *con* $f_1(a) = 0$, $J_{f_1}(a) \neq 0$.

Entonces, para $|\epsilon| > 0$ *suficientemente pequeño, existe una solución* $T-$*periódica* $\varphi(\cdot, \epsilon)$ *del sistema* (7) *tal que* $\varphi(\cdot, \epsilon) \to a$ *as* $\epsilon \to 0$.

Demostración. La demostración puede ser hallada en la página 168 de [6]. □

Resultados y Discusión

En esta sección, se presenta el método de averaging usando la teoria de grado de Brouwer. Se inicia probando que el problema de encontrar soluciones $T-$periódicas es equivalente a encontrar ceros de alguna función apropiada definida en espacios de dimensión finita, para esto se considera el siguiente sistema diferencial

$$x' = F(t, x, \epsilon) \tag{9}$$

donde $F : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, $T-$periódica en la primera variable, localmente Lipschitz en la segunda variable y D un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $z \in D$ se denotada por $x(\cdot, z, \epsilon) : [0, t_z) \to \mathbb{R}^n$ a la solución del sistema 9 con $x(0, z, \epsilon) = z$. Se asume que

$$t_z > T \text{ para todo } z \in D. \tag{10}$$

Se considera la función $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$$f(z, \epsilon) = \int_0^T F(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon) dt \tag{11}$$

así cada solución de (9) puede ser extendida por periodicidad a $\mathbb{R}$. Ahora, es posible presentar el siguiente lema.

Lema 0.2. *(Ver [3]) Sea el sistema diferencial $x' = F(t, x, \epsilon)$ donde $F : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ es una función continua,sea la función dada por* (11)*, entonces $f(z, \epsilon) = x(T, z, \epsilon) - x(0, z, \epsilon)$ además cada (z_ϵ, ϵ) tal que $f(z_\epsilon, \epsilon) = 0$ provee una solución periódica de* (9) *y cada solución periódica es una cero de f dada en* (11).

Demostración. La siguiente relación es evidente

$$\begin{aligned} f(z, \epsilon) &= \int_0^T F(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon)dt \\ &= \int_0^T \frac{dx}{dt}(t, z, \epsilon)dt \\ &= x(T, z, \epsilon) - x(0, z, \epsilon) \end{aligned}$$

así se tiene que si $f(z, \epsilon) = 0$, entonces $x(T, z, \epsilon) = x(0, z, \epsilon)$, es decir cada cero de f genera una solución $T-$periódica $x(\cdot, z, \epsilon)$ de (9). El recíproco es válido pues si se tiene una solución $T-$periódica, se cumple $x(T, z, \epsilon) = x(0, z, \epsilon)$ esto concluye que $f(z, \epsilon) = 0$, es decir (z, ϵ) es un cero de f. □

Para aplicar el lema 0.1 es necesario que la función f se encuentre en su forma estándar (ver (2)) por esta razón se asume que f es continua y de clase C^k con respecto al parámetro ϵ así se puede encontrar la serie de Maclaurin de $f = f(z, \epsilon)$ en una vecindad de este parámetro. Es decir,

$$f(z, \epsilon) = g(z, \epsilon) + \epsilon^{k+1} r(z, \epsilon) \tag{12}$$

donde g viene dada por:

$$g(z, \epsilon) = f(z, 0) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(z, 0) + \cdots + \frac{\epsilon^k}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(z, 0).$$

La función $r = r(z, \epsilon)$ está bien definida y es continua en $D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, excepto en $\epsilon = 0$. En particular, si r es continua en $K \times (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, donde K es un subconjunto compacto de D entonces r es acotada en $K \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$.

Cuando se usa el símbolo de Landau, la ecuación (12) se convierte en

$$f(z, \epsilon) = g(z, \epsilon) + \epsilon^{k+1} O(1) \tag{13}$$

(ver [3, 5, 6]). Si en la ecuación (9) se toma

$$F(t, x, \epsilon) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon),$$

entonces se está preparado para presentar el siguiente teorema.

Teorema 3. *(Método de promedio de primer orden) Sea el sistema diferencial*

$$x'(t) = \epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon) \tag{14}$$

donde $F_1 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ son funciones continuas, T-periódicas en la primera variable y D es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. se define $f_1 : D \to \mathbb{R}^n$ como:

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z)ds \tag{15}$$

y se asume que:

(a') *F_1 y R son localmente Lipschitz con respecto a x;*

(b') *Para $a \in D$ con $f_1(a) = 0$, existe una vecindad V de a tal que $f_1(z) \neq 0, \forall z \in \overline{V} \backslash \{a\}$ y $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.*

Entonces, para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución $T-$periódica $\varphi(\cdot, \epsilon)$ de (14) *tal que $\varphi(\cdot, \epsilon) \to a$ cuando $\epsilon \to 0$*

Demostración. Se afirma que $\forall z \in \overline{V}$, existe ϵ_0 tal que, si $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, entonces $x(\cdot, z, \epsilon)$ está definido en $[0, T]$, es decir se cumple la relación (10). En efecto, por el teorema de existencia y unicidad (ver página 2 de [5]), $t_z > h_z$ y $h_z = \text{ínf}(T, \frac{b}{M(\epsilon)})$ donde $M(\epsilon) \geq |\epsilon F_1(t, x) + \epsilon^2 R(t, x, \epsilon)| \, \forall t \in [0, T]$, para cada x con $|x - z| \leq b$ y cada $z \in \overline{V}$. Cuando $|\epsilon|$ es suficientemente pequeño, $M(\epsilon)$ puede ser tomado arbitrariamente grande, tal que $h_z = T \, \forall z \in \overline{V}$.

Para todo $t \in [0, T]$, $z \in \overline{V}$ y $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ la siguiente relación es válida

$$x(t, z, \epsilon) = z + \epsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \epsilon)) + \epsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds \tag{16}$$

y la función f dada en (11) para nuestro sistema viene dada por:

$$f(z, \epsilon) = \epsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \epsilon)) + \epsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \epsilon), \epsilon) ds \tag{17}$$

Ahora, se probará que:

$$f(z, \epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 \mathcal{O}(1) \text{ en } \overline{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0], \tag{18}$$

con f_1 dada por (15). Se observa que existe un subconjunto compacto $K \subset D$ tal que $x(t, z, \epsilon) \in K \; \forall \, t \in [0, T]$, $z \in \overline{V}$ y $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ (ver página 4 de [3], [4]).

Además, desde que R es continua en $[0, T] \times [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, existe $N_K > 0$ tal que $R(t, x(t, z, \epsilon)) \leq N_K$, es decir

$$\int_0^T R(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon) ds \leq \int_0^T N_K ds = \mathcal{O}(1) \tag{19}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \epsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \epsilon)) ds &= \epsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z) + F_1(s, z)] ds \\ &= \epsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)] ds \\ &\quad + \epsilon \int_0^T F_1(s, z) ds \end{aligned}$$

Luego de esta última relación junto con (19), se tiene

$$f(z, \epsilon) - \epsilon f_1(z) = \epsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)] ds + \epsilon^2 \mathcal{O}(1) \tag{20}$$

Al usar el hecho que F_1 is Lipschitz con respecto a x en $[0, T] \times K$ se tiene

$$|F_1(s, x(s, z, \epsilon)) - F_1(s, z)| \leq L_K |x(s, z, \epsilon) - z| = \epsilon \, \mathcal{O}(1). \tag{21}$$

replazando (21) en (20) la relación (18) es satisfecha.

Además (18) y la observación 2 junto con la hipótesis (b') asegura la existencia de z_ϵ tal que $f(z_\epsilon, \epsilon) = 0$ y $z_\epsilon \to a$ cuando $\epsilon \to 0$. Entonces, $\varphi(\cdot, \epsilon) = x(\cdot, z_\epsilon, \epsilon)$ es una solución periódica de (14) y $\varphi(\cdot, \epsilon) \to a$ cuando $\epsilon \to 0$ (esto es por la continuidad de soluciones del sistema (14) con respecto al parámetro ϵ y el dato inicial). $\square$

Observación 3. Si se compara el méto de averaging via grado de Brouwer con el método de averaging clásico (theorem 2) este último necesita que F_1, R, D_xF_1, $D_x^2F_1$ y D_xR sean definidas, continuas y acotadas por una constante M, que no depende de ϵ, en $[0, +\infty) \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ en lugar de (a'). Análogamente también requiere que $J_{f_1}(a) \neq 0$ para cada $a \in D$ con $f_1(a) = 0$ en lugar de (b').

Por la observación 1, se tiene que si $f_1(a) = 0$ y $Jf_1(a) \neq 0$, entonces $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$.

Observación 4. Esta observación es sobre la estabilidad de los ciclos límite hallados, para conocer su tipo de estabilidad se analiza los autovalores de la matriz jacobiana de f_1 en cada singularidad hiperbólica.

Averaging para sistemas autónomos planares

Aquí se verá como funciona el método de averaging para sistemas autónomos definidos en el plano, para ello se considera el sistema planar

$$\begin{aligned} x' &= P(x,y) \\ y' &= Q(x,y), \end{aligned} \tag{22}$$

donde $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas además se cumple:
(A1) El sistema (22) tiene un periodo anular alrededor del punto singular $(0,0)$,

$$\Gamma_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = h, \quad h_c < h < h_s\},$$

donde H es una integral primera, h_c es el nivel crítico de H correspondiente al centro $(0,0)$ y h_s denota el valor de H para el cual el periodo anular termina en una separatriz policiclo.

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $h_s > h_c \geq 0$. Se denota por $\mu = \mu(x,y)$ un factor integrante del sistema (22) correspondiente a la integral primera H.

Considere perturbaciones de (22) de la forma

$$\begin{aligned} x' &= P(x,y) + \epsilon p(x,y,\epsilon), \\ y' &= Q(x,y) + \epsilon q(x,y,\epsilon), \end{aligned} \tag{23}$$

donde $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. El propósito será escribir el sistema (23) en la forma estándar para aplicar el método del promedio para ϵ suficientemente pequeño. El sistema diferencial en esta forma describe la dependencia entre la raíz cuadrada de la energía $R = \sqrt{h}$ y el ángulo φ de las coordenadas polares. El campo vectorial de esta ecuación será $2\pi-$ periódico y sus soluciones $2\pi-$ periódicas serán trayectorias periódicas de (23).

Teorema 4. *Considere **(A1)** para el sistema* (22) *y que*

$$xQ(x,y) - yP(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \text{ en el periodo anular} \tag{24}$$

Sea $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \to [0, \infty)$ *una función continua tal que*

$$H(\rho(R,\varphi)\cos\varphi, \rho(R,\varphi)\sin\varphi) = R^2 \tag{25}$$

$\forall R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi)$. *Entonces la ecuación diferencial que describe la dependencia entre la raíz cuadrada de la energía* $R = \sqrt{h}$ *y el ángulo* φ *para el sistema* (23) *es:*

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{\mu(x^2+y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py)}, \tag{26}$$

donde $x = \rho(R,\varphi) cos\varphi$, $y = \rho(R,\varphi)\sin\varphi$. *Se toma* $\epsilon_f > 0$ *suficientemente pequeño y* $D = \cup_{h_{c*}<h<h_{s*}}\Gamma_h$, *donde* $h_c < h_{c*} < h < h_{s*} < h_s$ *son fijos pero arbitrariamente cercanos a* h_c, h_s *respectivamente. El campo vectorial de la ecuación* (26) *está bien definido, es continuo en* $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ *y es* $2\pi-$ *periódica con respecto a* φ.

Demostración. Como H es integral primera y μ es un factor de integración de (22), las siguientes relaciones son válidas en el periodo anular

$$\frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q = 0,\ \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P,\ \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q$$

Se define la función

$$G(r, R, \varphi) = H(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - R^2,$$

para cada (r, φ) del periodo anular (el cual es un conjunto abierto) y $R \in\ (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$. (r, φ) denotan las coordenadas polares, se tiene que:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial H}{\partial y}\sin\varphi = \mu(Q\cos\varphi - P\sin\varphi)$$

al hacer el cambio a coordenadas cartesianas se tiene que:

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\mu(x,y)}{r}\mu(Q(x,y)x - P(x,y)y),$$

donde $x = r\cos\varphi$ y $y = r\sin\varphi$. Para cada (r_0, φ_0) en la región de centros determinados por Γ_h existe un R_0 tal que $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$, además la hipótesis nos garantiza que $\frac{\partial G}{\partial r}(r_0, R_0, \varphi_0) \neq 0$, luego por el teorema de la función implícita se tiene que alrededor de cada punto (R_0, φ_0) existe una única función continua $\rho = \rho(R, \varphi)$ tal que la relación (25) es satisfecha, así esta función bien definida en todo $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$ y cumple con (25), además la ecuación (25) nos da la relación $R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$, de las relaciones $x = \rho\cos\varphi$ y $y = \rho\sin\varphi$ se tiene $\varphi(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right)$ siempre que $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h,\ t \in \mathbb{R}$. Luego, se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dR}{dt} &= \frac{\frac{\partial H}{\partial x}x' + \frac{\partial H}{\partial y}y'}{2\sqrt{H}} \\
&= \frac{\mu Q(P + \epsilon p) - \mu P(Q + \epsilon q)}{2R} \\
&= \frac{\mu QP + \mu Q\epsilon p - \mu PQ - \mu P\epsilon q}{2R} \\
&= \epsilon\frac{\mu(Qp - Pq)}{2R}.
\end{aligned}$$

De igual manera

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{1+(\frac{y(t)}{x(t)})^2}\frac{y'(t)x(t)-y(t)x'(t)}{x(t)^2}\\ &= \frac{1}{1+(\frac{y(t)}{x(t)})^2}\frac{(Q+\epsilon q)x-y(P+\epsilon p)}{x(t)^2}\\ &= \frac{(Qx-Py)+\epsilon(qx-py)}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

eliminando t se obtiene:

$$\frac{dR}{d\varphi}=\epsilon\frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)}{2R(Qx-Py)+2R\epsilon(qx-py)}$$

□

Observación 5. La función $f:(\sqrt{h_{c*}},\sqrt{h_{s*}})\times(-\epsilon_f,\epsilon_f)\to\mathbb{R}$ descrita por (11) para el sistema (26) viene dada por:

$$f(R,\epsilon)=\epsilon\int_0^{2\pi}\frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)}{2R(Qx-Py)+2R\epsilon(qx-py)+2R\epsilon(qx-py)}d\varphi$$

su serie de Mac-Laurin en alrededor de $\epsilon=0$, viene dada por:

$$\epsilon\frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)}{2R(Qx-Py)}+\epsilon^2\mathcal{O}(1),$$

de donde la función $f_1:(\sqrt{h_{c*}},\sqrt{h_{s*}})\to\mathbb{R}$ viene dada por:

$$f_1(R)=\int_0^{2\pi}\frac{\mu(x^2+y^2)(Qp-Pq)}{2R(Qx-Py)}d\varphi \tag{27}$$

donde $\mu=\mu(x,y)$ es el factor integrante del sistema (22) correspondiente a la integral primera H y $x=\rho(R,\varphi)\cos\varphi$ y $y=\rho(R,\varphi)\sin\varphi$.

Así encontrar órbitas periódicas del sistema (23) se reduce a encontrar ceros de la función definida en (27).

Ejemplo 2. (Bifurcación de un ciclo límite de un centro isócrono vía averaging) Sea el sistema diferencial

$$\begin{aligned}x' &= -y+x^2\\ y' &= x+xy,\end{aligned} \tag{28}$$

con un centro isócrono en el origen, cuya integral primera en el periodo anular tiene la expresión $H(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(1+y)^2}$ ya que su derivada a lo largo de la curva solución es cero. En este sistema $h_c=0$ y $h_s=1$ de la relación (25) se tiene que la función ρ definida en la hipótesis del teorema anterior está dada por $\rho(R,\varphi)=\frac{R}{1-R\sin\varphi}$ para todo $0<R<1$ y $\varphi\in[0,2\pi)$ Considere las perturbaciones

$$\begin{aligned}x' &= -y+x^2+\epsilon p(x,y)\\ y' &= x+xy+\epsilon q(x,y),\end{aligned} \tag{29}$$

donde $p(x,y) = a_1x - a_3x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6y^2$ y $q(x,y) = a_1y + a_2x^2 + a_4xy - a_2y^2$. La ecuación (26) para este caso está dada por

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R\sin\varphi + \epsilon c(\varphi)R} \tag{30}$$

donde

$$\begin{aligned}
a(\varphi) &= (-2a_1 + 3a_2 + a_5)\sin\varphi + (a_4 + a_6)\cos\varphi \\
&\qquad + (-4a_2 - a_5)\sin^3\varphi + (-a_3 - a_4 - a_6)\cos^3\varphi, \\
b(\varphi) &= a_1 + a_2 + (-a_1 - 2a_2)\cos^2\varphi - a_4\cos\varphi\sin\varphi, \\
c(\varphi) &= (a_3 + a_4)\sin\varphi + (-3a_2 - a_5)\cos\varphi + (-a_3 - a_4 - a_6)\sin^3\varphi \\
&\qquad + (4a_2 + a_5)\cos^3\varphi.
\end{aligned}$$

Al denotar por

$$\begin{aligned}
F_1(\varphi, R) &= \frac{a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R\sin\varphi} \\
G(\varphi, R, \epsilon) &= -\frac{(a_1R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3)c(\varphi)R}{(1 - R\sin\varphi)(1 - R\sin\varphi + \epsilon c(\varphi)R)}
\end{aligned}$$

el sistema (30) se transforma en

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon F_1(\varphi, \epsilon) + \epsilon^2 G(\varphi, R, \epsilon)$$

el cual esta en la forma estándar. Para aplicar el Teorema 3 se necesita la función f_1 que para este problema es $f_1 : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_1z + a(\varphi)z^2 + b(\varphi)z^3}{1 - z\sin\varphi} d\varphi,$$

al calcular esta integral mediante Mathematica se obtiene

$$\begin{aligned}
f_1(z) = -\frac{1}{2(z\sqrt{1-z^2})}\Big[&2a_2z^4 + (6a_2 + a_5 - 2a_1)z^2\sqrt{1-z^2} \\
&- (10a_2 + 2a_5)z^2 - (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1-z^2} + 8a_2 + 2a_5\Big]
\end{aligned}$$

al tomar la nueva variable $\xi \in (0,1)$ definida por $z = \sqrt{1-\xi^2}$, se tiene $f_1(\sqrt{1-\xi^2}) = \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}}(1-\xi)(2a_2\xi^2 + (2a_1 - 4a_2 - a_5)\xi + 2a_1 + 2a_2 + a_5)$. Se nota que $z \in (0,1)$ es un cero de f_1 si y solo si $\xi \in (0,1)$ es un cero de la función polinomial $g(\xi) = 2a_2\xi^2 + c_1\xi + c_2$ donde $c_1 = 2a_1 - 4a_2 - a_5$ y $c_2 = 2a_1 + 2a_2 + a_5$. Es fácil ver que en nuestra discusión sobre los ceros de g se puede considerar sus coeficientes como numeros reales arbitrarios. Se concluye que el número de ceros de g en el intervalo $(0,1)$ es a lo más dos. Esto significa que el número de ceros de f_1 es a lo más dos. Por lo tanto a lo mas dos ciclos límite bifurcan el periodo anular del sistema (28).

Ejemplo 3. Sea el sistema diferencial de Van Der Pol

$$\begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & -x-\epsilon(1-x^2)y, \end{array} \tag{31}$$

multiplicamos por $h(x,y) = -1$ así se nota que:

$$\begin{array}{rcl} P(x,y) & = & -y \\ Q(x,y) & = & x \\ p(x,y) & = & 0 \\ q(x,y) & = & (1-x^2)y \\ H(x,y) & = & (\dfrac{x^2+y^2}{2}) \end{array} \tag{32}$$

luego el numerador de la ecuación (26), $N = N(x,y)$ del teorema se expresa como:

$$N(x,y) = \mu(x^2+y^2)(Pq-Qp).$$

Como se tiene que $\mu(x,y) = 1$ y haciendo el cambio de variable

$$\begin{array}{rcl} x & = & \rho(R,\varphi)\cos\varphi \\ y & = & \rho(R,\varphi)\sin\varphi, \end{array} rcl$$

al reemplazar se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} N(x,y) & = & (x^2+y^2)(Pq-Qp) \\ & = & \rho^2(1-x^2)y^2 \\ & = & \rho^2[\rho^2\sin^2(\varphi)-\rho^4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)] \\ & = & \rho^4\sin^2(\varphi)-\rho^6\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi), \end{array}$$

de la igualdad $H(\rho(R,\varphi)\cos\varphi, \rho(R,\varphi)\sin\varphi) = R^2$, se tiene $\rho^2 = 2R^2$ de donde $\rho = R\sqrt{2}$, así se obtiene:

$$N(x,y) = 4\sin^2(\varphi)R^4 - 8\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)R^6.$$

El denominador de la ecuación (26) es dado por:

$$D(x,y) = 2R(Qx-Py) + 2R\epsilon(qx-py),$$

en la aplicación del método solo influye la expresión $\overline{D(x,y)} = 2R(Qx-Py)$, por tanto una expresión para tal es dada por:

$$\begin{array}{rcl} \overline{D(x,y)} & = & 2R(Qx-Py) \\ & = & 2R(x^2+y^2) \\ & = & 2R\rho^2 \\ & = & 4R^3 \end{array}$$

Por lo tanto, la ecuación (26) para este sistema se escribe como

$$\frac{dR}{d\varphi} = \frac{4\sin^2(\varphi)R^4 - 8\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)R^6}{4R^3+\epsilon g(R,\varphi,\epsilon)}$$

de acuerdo al método se tiene que encontrar los ceros simples de

$$\begin{aligned} f_1(R) &= \int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2(\varphi)R^4 - 8\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)R^6}{4R^3 + \epsilon g(R,\varphi,\epsilon)} d\varphi \\ &= R\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)d\varphi - 2R^3 \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)d\varphi \\ &= R(\pi - (\tfrac{\pi}{2})R^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto los ceros de f_1 son $R = 0$, $R = -\sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$, como R es la raíz de energía del sistema no puede ser negativo, para $R = 0$ corresponde a la singularidad en el origen solo resta $R = \sqrt{2}$. Se tiene que $R = \sqrt{2}$ es un cero simple ya que: $(f_1'(R)) = \pi - (\frac{3}{2}\pi R^2)$, entonces $(f_1'(\sqrt{2})) = -2\pi \neq 0$. Por el teorema de la función inversa existe una vecindad V de $R = \sqrt{2}$ tal que $f_1(v) \neq 0$ para todo $v \in V$, luego

$$d_B(f_1, V, 0) = signo(f_1'(\sqrt{2})) = signo(-2\pi) = -1 \neq 0,$$

y por el Teorema 3 el sistema inicial posee un ciclo limite, como es esperado en la ecuación de Van Der Pol.

Ejemplo 4. (Bifurcación de Hopf) El sistema que presenta bifurcación de Hopf es dado por

$$\begin{aligned} x' &= -\epsilon x - y + \epsilon(xy + xy^2 + x^3 + xy^3 + x^3y) \\ y' &= x - \epsilon y + \epsilon(y^2 + y^3 + yx^2 + x^3 + y^2x^2 + y^4), \end{aligned} \tag{33}$$

donde ϵ representa el parámetro de bifurcación. Sea $X = (x, y)^T$, se escribe el sistema de la forma:

$$X' = \begin{pmatrix} -\epsilon & -1 \\ 1 & -\epsilon \end{pmatrix} X + \epsilon \begin{pmatrix} R_1(X) \\ R_2(X). \end{pmatrix}$$

Se nota que la parte lineal del sistema depende del parámetro ϵ y tiene autovalores $-\epsilon \pm \imath$, además si $\epsilon > 0$ por el Teorema de Hartman-Grobman **??** el sistema es topologicamente conjugado a a un foco atractor lineal, si $\epsilon < 0$ el sistema es topologicamente conjugado a un foco repulsor, si $\epsilon = 0$ el sistema deja de ser hiperbólico y en este caso se tiene un centro global isócrono. Para detectar una órbita periódica y aplicar el método se realiza un cambio de variable a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = \sin\theta$ se tiene:

$$\begin{aligned} r' &= \epsilon r(r^2 - 1)(1 + r\sin\theta) \\ \theta' &= 1 + \epsilon r^2 \cos^2\theta, \end{aligned}$$

por la regla de la cadena resulta:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\epsilon r(r^2 - 1)(1 + r\sin\theta)}{1 + \epsilon r^2\cos^2\theta}$$

para ϵ suficientemente pequeño y haciendo uso de la formula de Mac-Laurin se puede escribir la ecuación diferencial como:

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon(r(r^2 - 1)(1 + r\sin\theta)) + \epsilon^2 R(r, \theta, \epsilon)$$

Así las hipótesis del Teorema 3 se cumple, al aplicar el método se observa que $F_1(r,\theta) = r(r^2 - 1)(1 + r\sin\theta)$, con lo cual

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r(r^2 - 1)(1 + r\sin\theta)d\theta = r(r^2 - 1)$$

los ceros de f_1 se dan cuando $r = 0$ o $r = \pm 1$ como el radio es positivo y excluyendo $r = 0$ se tiene que el único valor para r es 1, además $f_1'(1) = 2 \neq 0$. Por el teorema de la función inversa existe una vecindad V de $r = 1$ tal que $f_1(v) \neq 0 \forall v \in V$, por lo tanto $d_B(f_1, V, 0) = signo(f_1'(1)) = 1 \neq 0$, así el sistema inicial posee un ciclo límite.

Conclusiones y Sugerencias

1. El método de averaging, es decir el teorema (2) y el teorema (3), son válidos pues la sección transversal a un centro se mantiene mediante pequeñas perturbaciones, a esto se denomina que la propiedad de ser transversal es estable.
2. El método de averaging compara cuantitativamente las soluciones de un sistema autónomo con el de sistema no autónomo.
3. Para sistemas diferenciale en el plano como (22) que cumpla con la condición $(A1)$ se tiene que la función f_1 para nuestro sistema (22) está bien definida y está por (27), por lo tanto los ceros de (27) brindan las órbitas periódicas del sistema (23).
4. Se ha probado, usando el método de averaging, que el sistema de Van Der Pol (31) posee un ciclo límite, como era de esperar.
5. Se ha probado que el sistema (33), el cual presenta bifurcación de Hopf, posee un ciclo límite.

Sugerencias

1. Para aplicar el método de averaging primero se debe tener el sistema diferencial en su forma estándar (1).
2. El lema 0.2 es el alma del método de averaging en su versión moderna, teorema (3), note que en este lema se toma al conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ como abierto y acotado, por lo tanto los ciclos límite que se encuentran permanecen de algún modo cerca de la singularidad, esto impide encontrar los ciclos límites lejos de la singularidad.

Referencias

[1] A. BUICĂ & J. LLIBRE Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree. *Bull. Sci. Math* **128** (2004) 7–22.

[2] N. G. LLOYD *Degree Theory* Tract in Mathematics, **73**. Cambridge University Press, Cambridge, 1968.

[3] J. MENDOZA *Sistemas periódicos: perturbación y aplicaciones* Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú, 2013.

[4] J. SOTOMAYOR *Liçoes de equacoes diferenciais ordinarias.* Rio de Janeiro, 1979.

[5] F. VERHULST *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems.* Universitext, Springer-Verlag 1985.

[6] F. VERHULST *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems.* Universitext, Springer 1991.