Temas de divulgación científica

Formas diferenciales vectoriales y tensoriales

Pedro González Cueva
Docente de Ciencias Físicas y Matemáticas - UPAO
jgonzalezc1@upao.edu.pe

RESUMEN

En este artículo de naturaleza conceptual y pedagógica, se presenta una de las diferentes maneras de obtener algunos de los resultados básicos de la geometría clásica de Riemann, mediante las formas tensoriales.

Se establece en primer lugar, y como una motivación para las definiciones formales, las 1-formas diferenciales vectoriales para una superficie clásica M como una sub-variedad de $\mathbb{R}^3$ donde en cada punto $m \in M$ existe un plano tangente espacio vectorial tangente, sub-espacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ en m. Se hace notar entonces que la 1-forma vectorial sobre M en m se comporta como una aplicación lineal del espacio tangente de M en m sobre el espacio tangente envolvente $\mathbb{R}^3$. Una interpretación inversa puede definirse, en el sentido de la 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$, y el comportamiento de transformación lineal se mantiene.

Sin embargo, por razones de dualidad veremos como las 1-formas diferenciales vectoriales, se identifican, isomórficamente con otra aplicación lineal, dual de la primera, conocida como la adjunta. Pero también por motivos de la generalización de las 1-formas vectoriales a las formas tensoriales, se interpreta una 1-forma vectorial como una transformación lineal isomórfica al producto tensor de espacios vectoriales. Siendo así, generamos las 1-formas vectoriales mediante la diferencial total de un campo diferenciable que caracteriza a una superficie clásica con un plano tangente en cada punto $m \in M$.

Se generaliza entonces las 1-formas vectoriales a las $k-$formas vectoriales para espacios vectoriales generales.

Para una variedad Riemanniana que no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se supone que M está dotada de un producto interno propio. Entonces, tomando la diferencial covariante sobre M, se construye la $1-$forma diferencial vectorial sobre la variedad Riemanniana (o también la construcción inversa).

La conexión es considerada como una $1-$forma escalar y se acostumbra a escribirla como una matriz de $1-$formas escalares. Entonces se puede construir una $1-$forma vectorial simple, que si mantiene el producto cuña y el cálculo exterior, se obtiene resultados importantes en geometría diferencial.

En una segunda parte, se hace una extensión de $k-$formas diferenciales vectoriales a las llamadas $q-$formas tensoriales mediante la diferencial covariante de un tensor. Si se aplica, la diferenciación absoluta a estas $1-$formas tensoriales, se consigue una fórmula generadora de formas de curvatura (donde se incluye la $2-$forma torsión, y la $2-$forma curvatura).

Por derivación exterior de la forma$-$torsión y de la $2-$forma curvatura, obtenemos. las llamadas primera y segunda identidad de Bianchi generalizadas.

Nota: En la geometría de E. Cartán (ampliada a partir del año 2003 por M. Evans) las formas vectoriales, conjuntamente con la tétrada y el método del conmutador, constituyen la nueva geometría de la gravitación o teoría: E. C. E. (Einstein - Cartan - Evans). Es decir, correcciones y ampliaciones de la geometría Riemanniana Clásica.

ABSTRACT

In this article of conceptual and pedagogical nature, one of the different ways of getting some of the basic results of classical Riemann geometry is presented.

First, as a motivation for the formal definitions, the vector differential $1-$forms for a classical surface M as a sub-variety of $\mathbb{R}^3$ are established in each point $m \in M$ there exists a tangent plane vector space tangent, vector sub-space of vector space $\mathbb{R}^3$ en m. It should be noted, then, that the vector 1-form over M in m behaves as a linear application of the tangent space of M in m over the tangent envelope space $\mathbb{R}^3$. An inverse interpretation can be defined, in the sense of the $1-$form on $\mathbb{R}^3$, and the linear transformation behavior is maintained.

However, for reasons of duality we will see how the 1-vector differential forms, are identified, isomorphically with another linear, dual application of the first, known as the adjunct. But also because of the generalization of the vector 1-forms to the tensor forms, we interpret a vector 1-form as a linear isomorphic transformation to the product of vector spaces. Thus, we generate the vector 1-forms by the total differential of a differentiable field that characterizes a classical surface with a tangent plane at each point $m \in M$.

The vector 1-forms are then generalized to the vector forms for general vector spaces.

For a Riemannian manifold that is not a subspace of $\mathbb{R}^3$, it is assumed that M is endowed with its own internal product. Then, taking the covariant differential over M, the vector differential form on the Riemannian variety (or the inverse construction) is constructed.

The connection is considered as a $1-$scalar form and it is customary to write it as a matrix of $1-$scalar forms. A simple vector form can then be constructed, which, if it maintains the wedge product and the outer calculation, yields important results in differential geometry.

In a second part, $k-$differential vector forms are made to the so-called tensor forms by the covariant differential of a tensor. If absolute differentiation is applied to these tensor forms, a formula for generating curvature forms is obtained (where the twisting form is included, and the twisting form forms the same).

By external derivation of the $2-$form torsion and of the $2-$ curvature form, we obtain. the so-called first and second generalized Bianchi identities.

Note: In the geometry of E. Cartán (extended from 2003 onwards by M. Evans), the vector forms, together with the tetrad and the switch method, constitute the new geometry of gravitation or theory: ECE (Einstein - Cartan - Evans). That is, corrections and extensions of the classical Riemannian geometry.

1. Parte I

1.1. $K-$formas diferenciales vectoriales

Motivaremos la definición general de una $k-$forma diferencial vectorial, si consideremos un referencial ortonormal fijo (e_i) del sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^n$.

Supongamos entonces que tenemos una subvariedad M de R^n de dimensión $-k$, y sobre cada punto de ésta, existe un hiperplano tangente (o subespacio tangente) de dimensión $-k$, que a su vez es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ en $m \in M$. Como subvariedad de $\mathbb{R}^n$, M puede escribirse como una aplicación diferenciable de la forma

$$x^i = x^i(u_1, u_2, \ldots, u_k) \tag{1}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

y donde las u_k se consideran como coordenadas de la subavariedad M. Con (1) podemos construir un campo vectorial diferenciable.

$$\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2, \ldots, u_k) = x^i(u_1, u_2, \ldots, u_k) \tag{2}$$

que caracteriza a M, donde se ha prefijado el referencial (e_i). Si tomamos la diferencial total ordinaria a (2), se obtiene

$$d\vec{r} = dx^i e_i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j e_i = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j \otimes e_i \tag{3}$$

donde $\otimes$ significa producto tensor.

De esta manera, hemos construido una $1-$forma diferencial vectorial, donde $\frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j$, es un conjunto de q $1-$formas escalares definidas sobre M. Se denomina en este caso a $d\vec{r}$ como un vector diferencial o una diferencial de valor vectorial. Además, dentro del contexto del cálculo, el jacobiano $\left(\frac{\partial x^i}{\partial u^j}\right)_m$ caracteriza a $\vec{r}$. El valor del vector diferencial $d\vec{r}$ sobre un vector (o campo) contravariante situado en el espacio tangente T_m a M se da de la siguiente manera: Si $v = v^k e_k \in T_m(M)$ entonces

$$\begin{aligned} d\vec{r}(\vec{v}) &= \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j \otimes e_i(v^k e_k) \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j (v^k e_k) e_i \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j v^k \delta^j_k e_i \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial u^j} v^j e_i \end{aligned} \tag{4}$$

que es un vector contravariante de $\mathbb{R}^n$ (aquí du^j es la base dual de e_k). Si $\frac{\partial x^i}{\partial u^j} = A^i_j$, entonces por contracción tensorial, se tiene que las componentes de la $1 - forma$ vectorial, según (4) son A^i. Lo anterior demuestra que una $1-$forma vectorial lleva un vector tangente a M en m en un vector tangente del espacio tangente $T_m(\mathbb{R}^n)$, de $\mathbb{R}^n$, es decir una aplicación lineal

$$\varphi_* : T_m(M) \to T_m(\mathbb{R}^n) \tag{5}$$

Debemos observar que quién está transformando, por definición es la $1-$forma $\frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j$, y por lo tanto tenemos otra aplicación lineal φ^*, dual de φ_* llamada la aplicación transpuesta de φ (o adjunta de φ), según este diagrama de dualidad (un caso muy particular).

$$\begin{array}{ccc} T_m(M) & \xrightarrow{\varphi_*} & T_m(\mathbb{R}^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j & \xleftarrow{\varphi^*} & dx^i \end{array}$$

donde $\varphi := x^i(u^1, \ldots, u^k)$, $\varphi_* := d\vec{r}$. Actuando de la siguiente manera sobre un campo vectorial v

$$\varphi^*(dx^i)(v) = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j(v) = dx^i(\varphi(v)) \tag{6}$$

Sin embargo se puede construir la aplicación lineal inversa $d\vec{r}$, de la siguiente manera

$$(d\vec{r})^{-1} := A^k_i dx^i \otimes e_k \tag{7}$$

Nota 1 *Debemos recordar que la construcción de (7) se ha hecho en base a que M es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Para una geometría intrínseca, como la de Riemann (7) se modificará ligeramente.*

Conclusión 1 *Las formas vectoriales (3) y (7), desempeñan papeles inversos, la primera lleva vectores del espacio tangente $T_m(M)$ en vectores tangentes de $T_m(\mathbb{R}^n)$ y (7) hace lo contrario: lleva formas en formas.*

Con lo anterior damos una primera caracterización de $1-$forma vectorial.

Definición 1.1 *Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, y sea W un espacio vectorial de dimensión $-k$. Una $1-$forma diferencial vectorial sobre M, con valores en W es una aplicación A que asigna a cada punto $m \in M$ una aplicación lineal*

$$A_m : T_m(M) \rightarrow W \tag{8}$$

y por la dualidad de una aplicación lineal A_m^*

$$A_m^* : W^* \rightarrow T_m(M)^* \tag{9}$$

Ahora bien, si M es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, y $T_m(M)$ es su espacio vectorial tangente, entonces, si consideramos a $T_m(M)$ como un subespacio vectorial del espacio vectorial tangente $T_m(\mathbb{R}^n)$ que tiene un producto interno canónico (euclideano), $T_m(M)$ hereda este producto interno. Este producto interno es dado por un tensor simétrico dos veces covariante: g con componentes g_{ij}

Definición 1.2 *La asignación de un producto en $T_m(M)$ para todo $m \in M$, por el producto interno de $T_m(\mathbb{R}^n)$ es llamada la métrica Riemanniana inducida. La asociación anterior puede expresarse de las siguientes maneras (para este caso)*

$$< u, v >_m = < \varphi_* u, \varphi_* v > \tag{10}$$

Explicitemos ahora de acuerdo a (9) una $1-$forma vectorial diferencial. De la motivación dada en líneas anteriores, y del isomorfismo que existe entre transformaciones lineales de espacios vectoriales V y W con el producto tensor $V \otimes W$, donde W es un espacio prefijado, y que para nuestro caso, el producto tensor es dado por $V^* \otimes W$, esto es:

$$L(V, W) \approx \omega_i \otimes w_i \tag{11}$$

llegamos a la siguiente:

Conclusión 2 *Una $1-$forma diferencial vectorial sobre M, queda completamente caracterizada por las k $1-$formas escalares $w_1, w_2, \ldots, w_k$ sobre M, una vez que se ha prefijado una base $w_1, w_2, \ldots, w_n$ del espacio vectorial W. En forma simbólica, escribimos una $1-$forma vectorial diferencial como*

$$\omega = \omega_i \otimes w_i \tag{12}$$

Obsérvese que estas definiciones aparentemente sofisticadas tienen como sostén conceptual la motivación dada en líneas anteriores. Por lo tanto, la aplicación lineal estará dada de la siguiente forma explícita:

$$A : T_m(M) \rightarrow W$$

donde

$$A_m(w_m) = \sum^{k} < w_m, w_i(m) > w_i \tag{13}$$

$$< v, w > = w(v) \tag{14}$$

(debemos tener presente de lo anterior que a cada $1-$forma diferencial vectorial le corresponde una transformación lineal y recíprocamente)

Extendemos ahora de manera natural las $1-$formas diferenciales vectoriales a las $k-$formas diferenciales vectoriales, para lo cual comenzaremos dando una caracterización axiomática del espacio $\wedge^p V$.

Para definir una aplicación lineal F sobre $\wedge^p V$ si V es un espacio vectorial finito-dimensional, en este caso puede escribirse F como una matriz) es suficiente dar una función g de p variables sobre V tal que:

1. g sea lineal en cada variable por separado.

2. g es alternante en el sentido de que g se anula cuando dos de sus variables son iguales, y cambia de signo cuando dos de sus variables son intercambiadas. Entonces

$$F(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_p) = g(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$$

   está definida sobre generadores de $\wedge^p V$.

Sea entonces dos espacios vectoriales V_1 y V_2, siendo sus dimensiones m y n respectivamente. La base de V_1 es el conjunto $\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^m$ y $\tau^1, \tau^2, \ldots, \tau^n$ es l base de V_2. Sea ahora una transformación lineal

$$A : V_1 \to V_2$$

(es interesante el caso en que $m = n$) La aplicación

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \longrightarrow A\alpha_1 \wedge A\alpha_2 \wedge \ldots \wedge A\alpha_p \tag{15}$$

que lleva

$$X^p V_1 \to \Lambda^p V_2 \tag{16}$$

donde se observa que (15) es multilineal, lineal en cada una de sus variables, y además es alternante, de tal manera que por la caracterización axiomática, establecemos que la forma (15) es como actúa una transformación lineal A en $\Lambda^p V$. La "Potencia exterior"se define entonces

$$(\Lambda^p A)(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_p) = A\alpha_i \wedge A\alpha_2 \wedge \ldots \wedge A\alpha_p \tag{17}$$

Ahora bien, sea

$$w = a_i(x) dx^i \tag{18}$$

una $1-$forma definida sobre $(\mathbb{R}^n)^*$, entonces podemos determinar la $1-$forma diferencial escalar sobre M estableciendo que para (18) existe una transformación lineal φ^*, tal que

$$\varphi^*(a_i(x)dx^i) = a_i(x)\varphi^*(dx^i)$$

donde como se sabe, $\mathbb{R}^n$ y la subvariedad base M están ligadas por la transformación

$$x^i = x^i(u_1, u_2, \ldots, u_k) \tag{19}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\varphi^*(dx^i) = \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j$$

Por lo tanto:

$$\varphi^*(w) = a_i(x^i(u)) \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j \tag{20}$$

y la $1-$forma. diferencial vectorial será:

$$\overline{w} = a_i(x(u)) \frac{\partial x^i}{\partial u^j} du^j \tag{21}$$

Para el caso en que se tenga la $2-$forma cartesiana

$$w = a_{ij}(x(u)) dx^i \wedge dx^j \tag{22}$$

se tiene entonces que si

$$\varphi^* : \Lambda^2(\mathbb{R}^n)^* \to \Lambda^2(M)$$

entonces, la $2-$forma diferencial vectorial sobre $\Lambda^2(M)$ será (de acuerdo a (17))

$$\varphi^*(dx^i \wedge dx^j) = \varphi^* dx^i \wedge \varphi^* dx^j$$

De esta manera tenemos

$$\varphi^*(w) = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} du^\alpha \wedge du^\beta \tag{23}$$

Entonces podemos construir la $2-$forma diferencial vectorial

$$\overline{w} = a_{ij}(x(u)) \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \tag{24}$$

Como consecuencia de la antisimetría del producto exterior, se deduce que $a_{ij}(x) = -a_{ji}(x)$.

En general damos la siguiente definición:

Definición 1.3 *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita y V^* su dual. Una $k-$forma diferencial vectorial sobre V, es una aplicación, en que a cada punto $m \in M$ le asigna una aplicación multilineal alternante de grado $-k$, $w(m)$ de $T_m(M)$ en V tal que el diagrama de dualidad es válido.*

Si $\varphi^* \in V^*$ entonces según el diagrama de dualidad

$$(\varphi^* w(m))(v_1, v_2, \ldots, v_k) = w(m)[(\varphi_*(v_1, v_2, \ldots, v_k))] \tag{25}$$

La "derivada exterior"de una $k-$forma vectorial diferencial $w = w^i e_i$, denotada con dw es la $(k+1)-$forma diferencial vectorial definida por

$$dw = (dw^i) e_i \tag{26}$$

2. Parte II

2.1. $1-$Formas diferenciales vectoriales sobre una variedad Riemanniana

El problema a tratar en esta parte es el de construir una $1-$forma diferencial vectorial sobre una región que no es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. En este sentido, se trata de una $1-$forma diferencial vectorial intrínseca, para lo cual recordaremos que sobre una variedad diferenciable en cada punto de ella puede definirse un plano tangente (un espacio vectorial tangente de la misma dimensión que la variedad dada), y por lo tanto podemos definir dos referenciales: el primero $\{i_j\}$ está formado por vectores tangentes a las curvas paramétricas $x^k =$constante $k \neq j$. El referencial $\{i_j\}$ define en T_x un sistema oblícuo de coordenadas cartesianas de diferente longitud. El producto escalar en T_x es dada por

$$i_j \circ i_k = g_{ij} \tag{27}$$

El otro referencial $\{e_\alpha\}$ es ortonormal, tal que

$$e_\alpha \circ e_\beta = \delta_{\alpha\beta} \tag{28}$$

Entendemos aquí que g_{i_j} son las componentes del tensor métrico definido sobre, la que llamaremos de aquí en adelante una variedad Riemanniana. Los vectores $\{i_i\}$ pueden ser reemplazadas por razones pedagógicas por $\{e_i\}$ o en su defecto como operadores tangentes en la forma $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$, para ser concordantes con los vectores tangentes a las curvas paramétricas de una superficie ordinaria:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = e_i, \tag{29}$$

en el sentido geométrico.

Entonces, el objetivo básico es la de construir una $1-$forma diferencial vectorial ïntrínsica"que relacione un campo vectorial referido al referencial oblícuo con un campo vectorial (el mismo) referido al sistema ortonormal, y recíprocamente.

Consideremos un punto $\vec{r}$ de la variedad Riemanniana que se desplaza a lo largo de una curva $c = c(t)$, situada completamente sobre la variedad (se supone la existencia de curvas paramétricas sobre ella), se tiene entonces

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = e_i \frac{dx_i}{dt} \tag{30}$$

ó, en forma diferencial

$$d\vec{r} = dx_i e_i = dx_i \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{31}$$

donde se considera a $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$ como la "base natural"sobre el espacio T_x a la variedad Riemanniana.

De esta manera se ha construido una $1-$forma diferencial vectorial, inherente a la variedad Riemanniana, no es inducida.

Su acción sobre un vector $v = v^k e_k$, está en el espacio tangente en relación con el referencial ortonormal, para dar un vector sobre el espacio tangente en referencia a la base natural, esto es

$$d\vec{r}(v) = dx^i(v^k e_k)e_i = dx^i(v^k e_k)\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{32}$$

$$d\vec{r}(v) = v^k \delta^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{33}$$

donde nuevamente identificamos a $d\vec{r}$ sobre una variedad Riemanniana como una aplicación lineal del espacio tangente ortonormal de la variedad, sobre el espacio tangente a la variedad pero referido a la base natural.

Geométricamente, interpretamos (31) como el desplazamiento infinitesimal del punto $\vec{r}$ en m, con coordenadas x_i al punto m de coordenadas $(x_i + dx_i)$.

Se puede demostrar que $d\vec{r}$ es una invariante de forma. Ahora bien, si derivamos (29)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} = e_i \approx \frac{\partial}{\partial x^i}$$

se tiene

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{\partial e_i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} \tag{34}$$

y en términos de diferenciales obtenemos

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial x^j} dx^j \tag{35}$$

Pero, recordemos que de_i es una $1-$forma diferencial vectorial, por lo que puede ser escrita en la base $dx^i \otimes e_i$.

Como las propiedades de una variedad Riemanniana son inherentes a ella, es de suponer que las derivadas parciales que aparecen en (35) estén sobre le plano tangente a la variedad, y es por esta razón que solamente consideramos las proyecciones de $\dfrac{\partial e_i}{\partial x^j}$ sobre este espacio vectorial. por lo tanto escribimos

$$\frac{\partial e_i}{\partial x^j} = \Gamma^i_{j_k} e_i \tag{36}$$

y si definimos la matriz de $1-$formas escalares

$$w = (w^i_j) = \Gamma^i_{j_k} dx^k \tag{37}$$

tenemos entonces

$$de_j = \Gamma^i_{jk} e_i dx^k \tag{38}$$

que por razones de nomenclatura la escribimos en la forma siguiente:

$$de_j = w^i_j \otimes e_i = w^i_j \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{39}$$

y en forma matricial

$$de = we \tag{40}$$

que es nuevamente una $1-$forma diferencial vectorial.

Geométricamente, (w^i_j) representa la variación entre el $j-$ésimo vector básico en m con coordenadas x_i y el $j-$ésimo vector básico en el punto cercano de coordenadas $(x^i + dx^i)$.

Se considera que los $\Gamma^i_{j_k}$ son los coeficientes de una çonexión afínreferida a la base natural (o base curvada).

Con los resultados anteriores, estamos en condiciones de construir otra forma diferencial vectorial, mediante la diferencial covariante de un campo vectorial definido sobre la variedad Riemanniana, esto es $v = v(x)$.

En efecto, sea v un campo vectorial diferenciable definido sobre el plano tangente (con más propiedad: sobre el espacio tangente a la variedad Riemanniana) y $x = x(t)$, una curva sobre la misma variedad. Entonces podemos escribir

$$v = v^i(x)e_i = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

De esta manera, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv^i}{dt}e_i + v^i \frac{de_i}{dt}$$

que se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dv^i}{dt}e_i + \Gamma^i_{j_k} v^j \frac{dx^k}{dt} e_i \\ &= \left(\frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{j_k} v^j \frac{dx^k}{dt} \right) e_i \end{aligned} \tag{41}$$

y se acostumbra a escribir

$$\frac{Dv^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{dt} \tag{42}$$

que definen las componentes de la llamada *Derivada intrínsica o absoluta* de v a lo largo de $x = x(t)$.

En términos de diferenciales escribimos

$$Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j dx^k \tag{43}$$

$$Dv^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} dx^k v^j \tag{44}$$

$$= dv^i + w^i_j v^j \tag{45}$$

Tenemos entonces que Dv^i, se puede escribir

$$\begin{aligned} Dv^i &= \frac{\partial v^i}{\partial x^k} dx^k + \Gamma^i_{jk} v^j dx^k \\ &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} v^j \right) dx^k \end{aligned}$$

que es una 1−forma escalar intrínsica definida sobre la variedad Riemanniana, y por lo tanto, la 1−forma diferencial vectorial intrínsica se obtiene de (41), esto es:

$$\begin{aligned} Dv^i &= \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{ik} v^j\right) dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \nabla v^i dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned} \tag{46}$$

donde ∇v^i es la derivada covariante de v.

Se puede establecer este último resultado de manera análoga para campos tensoriales. Si bien ∇ es el símbolo para indicar la derivada covariante, debemos identificar a ∇ como un operador lineal actuando sobre campos vectoriales, esto es: $\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\right) v^j$. De manera análoga es importante reconocer a D como un operador diferencial llevando funciones (las componentes del campo v) en una 1−forma diferenciales escalares.

Nota 2 *La derivación covariante puede ser combinada con la derivada exterior. Definimos*

$$D(a_{i_1} \dots i_s dx^i \wedge \dots \wedge dx^{i_s}) = (\nabla a_{i_1 \dots i_s}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_s} \tag{47}$$

Corolario 2.1 *Para vectores básicos se tiene:*

$$De_j = w^i_j e^j \tag{48}$$

ó en su defecto (en forma sintética)

$$De = we \tag{49}$$

Nota 3 *Referencia básica [1] y [2]*

Nota 4 *Para un vector covariante existe un tensor de la forma $v_{ih} dx^i \otimes dx^k$*

3. Parte III: Aplicación:

Métrica Riemanniana Inducida

Esta aplicación es una metodología de trabajo de las 1−formas diferenciales vectoriales sobre una subvariedad euclideana M. Lo que sigue ha sido tomado de referencia [1].

En efecto, si consideramos un sistema de coordenadas cartesianas y consideramos a $\mathbb{R}^n$ como una variedad diferenciable, seleccionemos entonces una base natural prefijada $(e_i)_m = \frac{\partial}{\partial x_i}|_m$ con $i = 1, \dots, n$, y sea (dx^i) la base dual de la primera (o base natural). Sea M una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ con coordenadas locales (u_i), $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces escribimos para esta subvariedad

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_\alpha) \tag{50}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad \alpha = 1, \dots, k.$$

Entonces, el problema es el siguiente: determinar una expresión explícita para la métrica de M inducida por la métrica conocida en $\mathbb{R}^n$. Para esto, es necesario construir una $1-$forma diferencial vectorial sobre M que nos provee de una transformación lineal, del espacio tangente a M en m en el espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en el mismo punto. Aún más en otra transformación dual, llevando $1-$formas diferenciales de $(\mathbb{R}^n)^*$ en $1-$formas diferenciales en $(T_m(M))^*$. De esta manera por (20)

$$\varphi^*(dx^i) = \frac{\partial x_i}{\partial u^\alpha} du^\alpha$$

y la una $1-$forma vectorial será:

$$w = \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} du_\alpha \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{51}$$

que a su vez por el corolario 2.1 nos provee de una transformación lineal φ de $T_m(M) \longrightarrow T_m(\mathbb{R}^n)$.

Con los resultados anteriores, consideremos dos vectores v_1 y v_2 (o campos vectoriales) y formamos su producto interno en $T_m(M)$, de manera geométrica, esto es $< v_1, v_2 >$, por lo que trasladamos el problema al espacio tangente de $\mathbb{R}^n$ en m, donde si conocemos su producto interno clásico. Se tiene entonces

$$< v_1, v_2 >_{T_m(M)} = < \varphi_* v_1, \varphi_* v_e >_{T_m(\mathbb{R}^n)} \tag{52}$$

Pero conocemos la forma explícita de φ_* por (13), por lo que necesitamos conocer w_i, esto nos conduce a

$$= \left\langle \sum_i < v_1, \varphi^*(dx_i) > \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j < v_2, \varphi^*(dx_j) > \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

y por (20) se tiene

$$= \left\langle \sum_i < v_1, \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} du_\alpha > \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_j < v_2, \sum_\beta \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} du_\beta > \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

Pero el producto interno es bilineal (lineal en cada uno de sus argumentos) y teniendo en cuento que euclideanamente $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}$, tenemos:

$$= \left\langle \sum_i \sum_\alpha \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} < v_1, du_\alpha >, \sum_j \sum_\beta \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} < v_2, du_\beta > \right\rangle$$

$$\sum_{i,\alpha,\beta} \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} < v_1, du_\alpha >< v_2, du_\beta >$$

y si escribimos

$$g_{\alpha\beta} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}, \tag{53}$$

obtenemos

$$< \varphi_* v_1, \varphi_* v_2 >= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} < v_1, du_\alpha >< v_2, du_\beta >$$

y como $< v_1, du_\alpha >= du_\alpha(v_1)$ y $< v_2, du_\beta >= du_\beta(v_2)$ se tiene

$$< \varphi_* v_1, \varphi_* v_2 >= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} du_\alpha(v_1) du_\beta(v_2)$$

y por definición de *producto tensor*

$$du_\alpha \otimes du_\beta(v_1, v_2) = du_\alpha(v_1) du_\beta(v_2)$$

tenemos entonces

$$< \varphi_* v_1, \varphi_* v_2 >= \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} du_\alpha \otimes du_\beta(v_1, v_2)$$

ya que (53) es simétrico. De aquí:

$$I = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} du_\alpha \otimes du_\beta \tag{54}$$

4. Parte IV: Formas Tensoriales: Formas Torsión y Curvatura

Conociendo la distinción entre tensores definidos sobre espacios vectoriales finito dimensionales y tensores sobre una variedad, podemos entonces extender las definiciones dadas para las formas diferenciales vectoriales.

Definición 4.1 *Una forma tensorial w_x en un punto x de tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ y grado $-q$ está definida sobre una variedad diferencial M, como un elemento del producto tensor del espacio vectorial de tensores del tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ en x con el espacio vectorial de las $q-$formas diferenciales en x.*

Para ser concordantes con las formas diferenciales vectoriales consideramos a w_x como un tensor del tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ cuyos coeficientes son $q-$formas diferenciales, esto es

$$w_x = Q_{\alpha_i \ldots \alpha_q} w^{\alpha_1} \wedge w^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge w^{\alpha_q} \tag{55}$$

o en su defecto

$$w_x = P^{i\dots}_{jk\dots} \otimes Q_{\alpha_i \dots \alpha_q} w^{\alpha_1} \wedge w^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge w^{\alpha_q} \tag{56}$$

para una base dual generalizada (w^{α_i}), $i = 1, \dots, q$ definidos sobre U_i, las componentes de esta forma tensorial son

$$w^{i\dots}_{jk\dots} = A^{i\dots}_{jk\dots\alpha_1\alpha_2\alpha_q} w^{\alpha_1} \wedge w^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge w^q \tag{57}$$

donde los coeficientes $A^{i\dots}_{jk\dots\alpha_1\alpha_2\alpha_q}$ restringidos al punto $x \in U$ son las componentes de un tensor en x tipo $\begin{pmatrix} k \\ l+q \end{pmatrix}$ Para un cambio de base $(\overline{w}^a)$ se comprueba que tanto $\overline{w}^{i\dots}_{jk\dots}$ y $A^{i\dots}_{jk\dots\alpha_1\alpha_2\alpha_q}$ son componentes de un tensor, por la primera caracterización de un tensor clásico.

Definición 4.2 *Una forma tensorial w en x del tipo w_x como un tensor del tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ y grado $-q$ está definida como una aplicación lineal w_x del espacio de los multivectores o $q-$formas diferenciales en x en el espacio de los tensores del tipo $\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ en x.*

Ejemplo 4.1 *Supongamos la $2-$forma tensorial del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ esto es:*

$$w_x = (w_{ij}) = A_{kj} B_{\alpha_1\alpha_2} w^{\alpha_1} \wedge w^{\alpha_2}$$

que se puede escribir, según (18) como

$$w_x = (w_{ij}) = A_{ij} B_{\alpha_1\alpha_2} \frac{1}{2} \delta^{\alpha_1\alpha_2}_{12} w^{\alpha_1} \otimes w^{\alpha_2} \tag{58}$$

donde se supone que (w^i) es base dual de (e_i), que aplicado a los vectores $u = u^k e_k$ y $v = v^l e_l$ se tiene

$$\begin{aligned} w_x(u,v) &= \frac{1}{2} A_{ij} B_{\alpha_1\alpha_2} \delta^{\alpha_2\alpha_2}_{12} w^{\alpha_1} \otimes w^{\alpha_2}(u,v) \\ &= \frac{1}{2} A_{ij} B_{\alpha_1\alpha_2} \delta^{\alpha_2\alpha_2}_{12} w^{\alpha_1}(u^k e_k) w^{\alpha_2}(v^l e_k) \\ &= \frac{1}{2} A_{ij} B_{\alpha_1\alpha_2} \delta^{\alpha_2\alpha_2}_{12} u^k \delta^{\alpha_1}_k v^l \delta^{\alpha_2}_l \\ &= \frac{1}{2} A_{ij} B_{\alpha_1\alpha_2} u^{\alpha_1} v^{\alpha_2} \delta^{\alpha_1\alpha_2}_{12} \end{aligned}$$

pero por contracción tensorial y desarrollo de $\delta^{\alpha_1\alpha_2}_{12}$ se tiene

$$w_x(u,v) = A_{ij}$$

es decir, hemos obtenido el tensor $t = A_{ij} e^i \otimes e_j$.

4.1. Derivada absoluta de formas tensoriales

La conexión sobre una variedad diferenciable es una de los tres conceptos más importantes de la Geometría Diferencial Moderna. Se establece la matriz de conexión en la forma

$$w^i_j = \Gamma^i_{jk} dx^k \tag{59}$$

que es una matriz de $1-$fromas escalares. Podemos escribir esta matriz en forma compacta como la matriz w. Veamos entonces cómo cambia esta matriz w, es decir consideremos la situación global. Sea M un variedad diferenciable, y consideremos m el *referencial móvil afin* $e_1, \ldots, e_n$, conjuntamente con un entorno de coordenadas U, donde se define (e_i). Conocemos que para un (e_i) tenemos una conexión afín, esto es, una matriz w de $n \times n$ de $1-$formas sobre U.

Supongamos ahora que tenemos dos entornos de coordenadas (U, e) y $(\overline{U}, \overline{e})$. SObre la intersección $U \cap \overline{U}$ de los entornos tenemos el cambio de referenciales (o cambio de coordenadas)

$$\overline{e} = Ae \tag{60}$$

donde A es una matriz no singular de funciones. Tenemos entonces sobre la variedad riemanniana M

$$\begin{aligned} D\overline{e} &= D(Ae) = dAe + A(De) \\ &= (dA + Aw)e \\ &= (dA + Aw)A^{-1}\overline{e} \end{aligned}$$

pero $D\overline{e} = \overline{we}$. Se tiene por lo tanto

$$\overline{w} = AwA^{-1} + dAA^{-1} \tag{61}$$

lo que demuestra que la matriz de conexión no se comporta como las componentes de un tensor.

Ahora bien, recordemos que algunas veces es muy conveniente usar la *Diferencial Covariante o Diferencial Absoluta*. Esta es denotada por DT y definida por

$$DT^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p} = (D_i T^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p}) dx^i \tag{62}$$

entonces nuevamente D es un operador lineal que convierte componentes escalares en una forma diferencial. Por ejemplo la diferencial absoluta de un campo vectorial con componentes (v^i) es dada por

$$Dv^i = dv^i + w^i_j v^j \tag{63}$$

y de manera análoga, para el campo vectorial (o covector) (u_i) se tiene

$$Du_i = du_i - w_i u_j \tag{64}$$

y para la Derivada Absoluta de un Tensor $T^{r_1 \cdots r_m}_{s_1 \ldots s_p}$ se tiene definido su diferencial covariante

$$DT^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p} = dT^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p} + \sum_{\alpha=1}^{m} w^{r_\alpha}_j T^{r_1 \ldots r_{\alpha-1} l r_{\alpha+1} \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_p} - \sum_{\beta=1}^{p} w^k_{s_\beta} T^{r_1 \ldots r_m}_{s_1 \ldots s_{\beta-1} k s_{\beta+1} \ldots s_p} \tag{65}$$

donde se observa nuevamente que el operador D mapea un campo (componentes) de tensores del tipo $\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$ en $1-$forma tensorial definida sobre M del mismo tipo.

Veamos ahora como extender esta operación D cuando $T^{r_1\ldots r_m}_{s_1\ldots s_{\beta-1}ks_{\beta+1}\ldots s_p}$ son las componentes $w^{i\ldots}_{jk\ldots}$ de una forma tensorial, esto es

$$\varphi^{i\ldots}_{jk\ldots} = A^{i\ldots}_{jk\ldots\alpha_1\ldots\alpha_q} w^{\alpha_1} \wedge w^{\alpha_2} \wedge \ldots \wedge w^{\alpha_q}$$

donde las (w^{α_i}) $i = 1\ldots q$ son bases duales . Parece entonces que preservando la operación "cuña" y el "producto exterior"de formas diferenciales, se tenga en analogía con la relación (65) la definición:

$$D\varphi^{i}_{jk\ldots} = d\varphi^{i\ldots}_{jk\ldots} + w^i_s \wedge \varphi^{s\ldots}_{jk\ldots} - w^h_j \wedge \varphi^{i\ldots}_{hj\ldots} - w^l_k \wedge \varphi^{i\ldots}_{jl\ldots} + \ldots \tag{66}$$

que son componentes relativas a una base (w^i) de una $(q+1)$ forma tensorial, llamada la Diferencial Covariante de w con respecto a la conexión (w^j_i) y se indica con Dw. La relación (66) es cierta, si probamos que las componentes $D\varphi^{i\ldots}_{jk\ldots}$ son invariantes de forma por transformación de coordenadas y haciendo uso de la ley de transformación para las componentes de conexión (61) de donde acentuamos que la forma diferencial covariante Dw de una $q-$forma tensorial w es una $(q+1)$ forma diferencial del mismo tipo.

4.2. Consecuencias: Tensor torsión, tensor curvatura, Identidades de Bianchi.

La fórmula (66) es una generalización del concepto de curvatura. Para nuestros fines sólo analizaremos los dos casos conocidos en Geometría Riemanniana: La torsión (o segunda curvatura) y la curvatura de una conexión. Como consecuencia de estas dos curvaturas, por derivación exterior, obtendremos nuevamente la primera y segunda identidades de Bianchi generalizadas.

Temporalmente por ser muy usual en Geometría Diferencial y la física teórica indicamos con T la torsión y con Ω la curvatura.

Para comenzar tomamos la $1-$forma vectorial $w^i e_i$ (en el caso riemanniano) de la fórmula general (66) obtenemos las componentes de una $2-$forma vectorial

$$Dw^i = dw^i + w^i_s \wedge w^i \tag{67}$$

ó

$$\Omega^i = Dw^i = dw^i + w^i_j \wedge w^s \tag{68}$$

donde Ω^i son las componentes de la llamada Forma Torsión de la conexión en la base general (w^{α_i}).

Nota 5 *Como* $(w^i \wedge w^j)$ *es una base para el espacio vectorial de las* $2-$*fromas podemos escribir*

$$\Omega^i = T^i_{jk} w^j \wedge w^k \tag{69}$$

donde por si condición de ser una $2-$*forma* T^i_{jk} *es un tensor antisimétrico en s y k, esto es* $T^i_{jk} - T^i_{kj}$.

Nota 6 *Si consideramos bases naturales duales de la forma* (dx^i)*, se obtiene de (68)*

$$\begin{aligned} \Omega^i = Dw^i &= d(dx^i) + w^i_j \wedge dx^j \\ \Omega^i &= \Gamma^i_{jk} dx^k \wedge dx^j \end{aligned} \tag{70}$$

que es la $2-$*forma torsión en bases naturales. Ahora bien, de (70) y (69) se tiene*

$$\begin{aligned} \Omega^i &= \Gamma^i_{jk} dx^k \wedge dx^j \\ \Omega^i &= \Gamma^i_{kj} dx^j \wedge dx^k = \Gamma^i_{kj} dx^k \wedge dx^j \\ 2\Omega^i &= (\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}) dx^k \wedge dx^j \\ 2T^i_{kj} dx^k \wedge dx^i &= (\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}) dx^k \wedge dx^j \end{aligned}$$

de donde:

$$2T_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$$

y cambiando j *con* k *se tiene*

$$2T_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \tag{71}$$

ó

$$T_{jk} = \frac{1}{2}(\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}) \tag{72}$$

que corresponde a la definición de tensor torsión en bases naturales y los Γ^i_{jk} *son los coeficientes de conexión.*

Consideremos ahora la $2-$forma diferencial vectorial con componentes Ω^i_j. De (66) se tiene:

$$\Omega^i_j = dw^i_j + w^i_j \wedge w^s_j \tag{73}$$

que son las componentes con respecto a la base dual generalizada (w^{α_i}) de una forma tensorial, llamada la *forma curvatura* de la conexión.

Nuevamente el conjunto de funciones Ω^i_j forman un tensor denominado *tensor curvatura.*

Para probar que Ω^i_j es un tensor por un cambio de coordenadas, hacemos uso de este cambio de coordenadas y del cambio de componentes de la conexión para obtener

$$\overline{\Omega}^l_k = d\overline{w}^l_k + w_k \wedge \overline{w}^h_k \tag{74}$$

es decir, es un invariante de forma absoluto.

En términos de bases naturales (dx^i) escribimos

$$\Omega^i_j = \Gamma^i_{jlm} dx^l \wedge dx^m \approx \Gamma^i_{jkl} \tag{75}$$

Sin embargo, podemos escribir de manera explícita las componentes Ω^i_j; es decir, $R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jkl}$. Por lo tanto, tenemos de (73):

$$\begin{aligned}
\Gamma^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l &= d(\Gamma^i_{jl} dx^l) + \Gamma^i_{hk} dx^k \wedge \Gamma^k_{hl} dx^k \wedge dx^l \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma^i_{jl} \right) dx^k \wedge dx^l + \Gamma^i_{hk} \Gamma^h_{jl} dx^k \wedge dx^l \\
&= \frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma^i_{jl}) dx^k \wedge dx^l + \Gamma^i_{hk} \Gamma^h_{jl} dx^k \wedge dx^\epsilon
\end{aligned}$$

Pero por definición de una 2−forma, cada componente debe tener coeficientes antisimétricos en k y l. Así

$$\Gamma^i_{jkl} dx^k \wedge dx^l = \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma^i_{jl}) - \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma^i_{jk}) \right] + \left[\Gamma^h_{jl} \Gamma^i_{hk} - \Gamma^h_{jk} \Gamma^i_{hl} \right] \right\} dx^k \wedge dx^l$$

Por lo tanto

$$R^i_{jkl} \Gamma^i_{jkl} = \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\Gamma^i_{jl}) - \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma^i_{jk}) \right] + (\Gamma^h_{jl} \Gamma^l_{hk} - \Gamma^h_{jk} \Gamma^i_{kl}) \tag{76}$$

y nuevamente Γ^i_{jkl} son las componentes de un tensor llamado el *tensor de curvatura de la conexión* o *forma curvatura* de la conexión.

Finalmente veremos como la teoría clásica del cálculo tensorial y el cálculo tensorial de formas son herramientas matemáticas complementarias.

Veamos entonces que sucede si tomamos la derivada exterior a los tensores torsión y curvatura, es decir

$$\Omega^i = dw^i + w^i_j \wedge w^j \tag{77}$$

y

$$\Omega^i_j = dw^i_k + w^i_k \wedge w^k_j \tag{78}$$

Para el caso de (77), obtenemos

$$d\Omega^i = dw^i_j \wedge w^j - w^i_j \wedge dw^j \tag{79}$$

Pero de (78) obtenemos

$$dw^i_j = \Omega^i_j - w^i_j \wedge w^k_l \tag{80}$$

y de (77)

$$dw^i = \Omega^i - w^i_j \wedge^j = dw^j = \Omega^j - \Omega^j_k \wedge w^k \tag{81}$$

y reemplazando (80) y (81) en (81), obtenemos

$$d\Omega^i - \Omega^i_j \wedge w^j + w^i_j \wedge \Omega^j = 0$$

que es el desarrollo (según (65))

$$D\Omega^i = \Omega^i_j \wedge w^j \tag{82}$$

conocida también como la primera identidad de Bianchi Generalizada.

De manera análoga para (78), se obtiene por derivación exterior:

$$d\Omega^i_j - \Omega^i_k \wedge w^k_j + w^i_k \wedge \Omega^k_j = 0 \tag{83}$$

que de acuerdo a (65) se escribe en la forma sintética

$$D\Omega^i_j = 0 \tag{84}$$

y es llamada la segunda identidad de Bianchi generalizada.

Estas identidades se reducen a ciertas identidades determinadas por Bianchi, cuando la conexión es simétrica, y por lo tanto la torsión es nula. Las identidades (83) y (84) son las llamadas ïdentidades generalizadas de Bianchi". En efecto, relativas a la base natural dual (dx^i), estas ecuaciones se escriben

$$B^i_{jkl} + B^i_{klj} + B^i_{ljk} = 0 \tag{85}$$

y

$$B^i_{jkl,m} + B^i_{jlm,k} + B^i_{jmk,l} = 0 \tag{86}$$

y ellas aparecen de manera natural de la escritura

$$B^i_{jkl,m} dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m = 0 \tag{87}$$

5. Conclusiones:

1. Los trabajos de Elie Cartán sobre conexiones, Grupos de Holonomía y Espacios Homogéneos, son la fuente de todo lo que interesa en Geometría Diferencial Moderna y su implicancia en Física Teórica. El error de la Geometría de Riemann sobre la cual se basó A. Einstein para su teoría de la Gravitación es de haber considerado la conexión como simétrica, y por tanto la exclusión de la torsión, ha dado lugar a la dudosa Teoría General de la Relatividad y por consiguiente a la Cosmología.

2. Las formas vectoriales, por construcción constituyen el llamado campo vectorial completo, y éstas formas diferenciales vectoriales son invariantes de forma, y llevan un campo vectorial definido sobre el espacio tangente de una variedad en un campo vectorial referente al espacio tangente euclídeo. Esta fue la idea primigenia de Cartán en el sentido de transformar problemas de Geometría Riemanniana a problemas de Geometría euclídeana, y por consiguiente problemas de la Relatividad Generalizada a problemas de Relatividad Especial.

3. No todos los métodos matemáticos son equivalentes. El cálculo exterior es un método más general que el cálculo tensorial. Sin embargo hemos visto que ambos cálculos se compatibilizan, y se puede pasar de uno a otro, teniendo en cuenta que las formas diferenciales son deducidas de los campos vectoriales. Aún más se pueden usar, üno sobre el otro"según convenga. Se observa entonces que se ha generado una fórmula en cadena de torsiones y curvaturas.

La bibliografía que sigue ha servido para elaborar el artículo, pero con pequeñas modificaciones por razones pedagógicas, dando al artículo una conformación sistemática, y conceptualmente coherente.

Referencias

[1] Louis Auslander., *Differential Geometry.* A - Harper International Edition - 1967.

[2] T. J. Willmore., *An introduction to Differential Geometry*, Oxford at the Claredon -Press - 1964.

[3] H. Guggenheimer., *Differential Geometry* McGraw-Hill Book Company, Inc -1963.

[4] Harley Flanders *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Academic Press -1965.

[5] Barret O'neil. *Elementary Differential Geometry.* Academic Press -1969.