MATHEMA 3(1) 35-49
REVISTA DE INVESTIGACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
LAMBAYEQUE-PERÚ

Conclusión válida en una inferencia por inclusión de clases

Valid conclusion on an inference by inclusion of classes

Mg. Amado Malca Villalobos[1]
Mg. Cesar Raúl La Torre Alarcón[2]

RESUMEN

En el presente investigación, se hace un análisis de dos álgebras Booleanas clásicas, la lógica proposicional y la lógica de clases para una mejor comprensión de una inferencia matemática, la cual es el constructo matemático más simple con el cual se construyen los conceptos matemáticos de una manera adecuada. La validación de una inferencia lógica o una equivalente a ella en la lógica de clases es fundamental en cualquier área del conocimiento, en especial en el área de ciencias e ingeniería, lo que implica analizar todo artículo científico usando el lenguaje de la lógica. Por lo cual se hace necesario establecer una equivalencia con algún constructo más manejable, que pueda visualizarse de una forma más geométrica. La lógica de clases es la herramienta adecuada, puesto que algebraicamente son equivalentes. Por eso, se trabaja con una inferencia en la que la conjunción de premisas tiene su equivalente en lógica de clases, y esta clase es un subconjunto de alguna clase, que a su vez tiene como equivalente a una proposición que resulta ser una conclusión válida del conjunto de premisas.

Palabras clave: proposición, conclusión, inferencia, inclusión.

ABSTRACT

In this research, an analysis of two classic Boolean algebras is made, propositional logic and class logic for a better understanding of a mathematical inference, which is the simplest mathematical construct with which mathematical concepts are constructed in an appropriate way. Validation of a logical inference or its equivalent in class logic is essential in any area of knowledge, especially in the area of science and engineering, this implies analyzing every scientific article using the language of logic. Therefore, it is necessary to establish an equivalence to a more manageable construct, which can be visualized in a more geometric way. Class logic is the right tool, since they are algebraically equivalent. So we work with an inference in which the conjunction of premises has its equivalent in class logic, and this class is a subset of some class, which in turn is equivalent to a proposition that turns out to be a valid conclusion of the set of premises.

Key words: proposition, conclusion, inference, inclusion.

1 Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Departamento Académico de Matemáticas. amalca@unprg.edu.pe

2 Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Departamento Académico de Física. clatorre@unprg.edu.pe

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo de investigación se da una mirada a un algebra de Boole, que se construye desde unos principios básicos, para luego llevar los resultados obtenidos a cualquier algebra de Boole, como son: el álgebra de proposiciones y la lógica de clases. Los ambientes donde se desarrolla el trabajo de investigación.

Se estudió luego el álgebra de proposiciones, generada desde n proposiciones simples, también se estudia una implicación y algunas equivalencias notables, así como las leyes lógicas. Se analiza una inferencia tanto valida como invalida.

Luego se realiza una descripción general de una clase, cuáles son sus componentes. Cómo interactúan entre ellas, que relaciones existen entre clases, se prueban algunos resultados clásicos, también se tiene resultados producto de la experiencia didáctica con este objeto que es la clase.

Luego se va ampliando esta misma metodología para todas las nuevas clases encontradas, como son la unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica. Y otras que salen en el transcurso del desarrollo de esta investigación.

De esta forma se obtuvo una conclusión valida, desde un conjunto de premisas. Uno de los resultados que se verá es que la conclusión, no siempre es única. Para ello se trabaja con el equivalente de las premisas en una lógica de clases. La conclusión será el equivalente lógico de la clase que contiene a la clase equivalente de la conjunción de las premisas.

MÉTODO

Para ello se usó el método axiomático, para desarrollar de la manera más adecuada mediante el uso de definiciones, axiomas, teoremas, corolarios y ejemplos adecuados.

MATERIALES

ALGEBRA BOOLEANA: Una operación binaria $\circ$ en un conjunto M es una regla que asigna a cada par ordenado (a, b) de elementos de M un elemento único $c = a \circ b$ de M. Que cumple los siguientes axiomas:

Es asociativa si y sólo si para todo a, b y c en M, $a\circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

Es conmutativa si y sólo si para todo a y b en M, $a\circ b = b \circ a$.

Sean $\circ$ y * dos operaciones binarias en el mismo conjunto M, $\circ$ es distributivo respecto a * si y sólo si para todo a, b y c en M, $a\circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c)$.

Un elemento e de una clase M es una identidad para la operación binaria $\circ$ si y sólo si $a \circ e = e \circ a =$

a para todo elemento a de M.

DEFINICION. Una clase de elementos B junto con dos operaciones binarias (+) y (•) (donde a • b será escrito ab) es una álgebra booleana si y sólo si se verifican los siguientes postulados:

P1. Las operaciones (+) y (•) son conmutativas.

P2. Existen en B distintos elementos identidad 0 y 1 relativos a las operaciones (+) y (•), respectivamente.

P3. Cada operación es distributiva respecto a la otra.

P4. Para cada a de B existe un elemento a' de B, tal que a + a' = 1 y aa' = 0.

Notamos inmediatamente que el álgebra de conjuntos satisface todos estos postulados y, por lo tanto, es un álgebra booleana. Recíprocamente, se demuestra que toda álgebra booleana satisface todas las leyes básicas obtenidas para el álgebra de clases. De hecho, puede asegurarse mucho más en el sentido de que toda álgebra booleana puede ser interpretada como un álgebra de conjuntos para una selección adecuada del conjunto universal.

Algunos resultados importantes en un algebra de Boole:

TEOREMA 1. Toda proposición o identidad algebraica deducible de los postulados de una álgebra booleana sigue válida si todas las operaciones (+) y (•), y los elementos identidad 0 y 1 son intercambiados. (Este teorema se conoce como el principio de dualidad.)

TEOREMA 2. Para cada elemento a en una álgebra booleana B, a + a = a y aa = a.

TEOREMA 3. Para cada elemento a en álgebra booleana B, a+ 1 = 1 ya0= 0.

TEOREMA 4. Para cada par de elementos a y b en un álgebra booleana B, a + ab = a y a(a + b) = a.

TEOREMA 5. En toda algebra booleana B, cada una de las operaciones binarias (+) y (.) es asociativa. Esto es, para toda a, b y c en B,

a + (b + c) = (a + b) + c y a(bc) = (ab)c.

TEOREMA 6: El elemento a' asociado con el elemento a en el álgebra booleana es único. (Esto es, sólo un elemento a' satisface las condiciones de P4).

TEOREMA 7. Para toda a en un algebra booleana B, (a')'=a.

TEOREMA 8: En toda algebra booleana, 0' = 1 y 1' = 0.

TEOREMA 9: Para toda a y b en un algebra booleana B, (ab)' = a' + b' y (a + b)' = a'b'

Luego para extender los resultado deducidos para ecuaciones condicionales, es necesario introducir la relacion $\subseteq$ en un algebra booleana general. Esto se hace con la siguiente definicion.

Definicion. La relacion de orden $a \subseteq b$ se define por la proposicion: Para toda a y b en un algebra booleana B, $a \subseteq b$ si y solo si $ab' = 0$.

Teorema 10.Las siguientes 4 propiedades de $\subseteq$ son validas en toda algebra booleana para elementos arbitrarios x, y y z.

a) Si $x \subseteq y$ y $y \subseteq z$, entonces $x \subseteq z$.

b) Si $x \subseteq y$ y $x \subseteq z$, entonces $x \subseteq y$.

c) Si $x \subseteq y$, entonces $x \subseteq y + z$ para toda z.

d) $x \subseteq y$ si y solo si $y' \subseteq x'$.

Representación de un álgebra booleana. Le parecerá raro al lector que, excepto por la diferencia en presentación como un sistema axiomático, una álgebra booleana arbitraria tenga tanto en común con una álgebra de clases, y con el álgebra de proposiciones. Por ello tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA. Toda álgebra booleana abstracta es isomorfa a un álgebra de clases.

LA LOGICA SIMBOLICA Y EL ALGEBRA DE PROPOSICIONES: En toda álgebra es necesario empezar con ciertos conceptos primitivos en la forma de términos no definidos. Esto es típico de todo sistema formal y también es cierto en el álgebra de proposiciones. Los términos cierto, falso y proposición serán considerados aquí como no definidos. Sin intentar investigar el significado filosófico de verdad y falsedad, supondremos que las palabras cierto y falso son atributos que se aplican a las proposiciones. Por una proposición entenderemos el significado de toda oración declarativa que está libre de ambigüedad y que tiene la propiedad de que es cierto o falso, pero no ambos.

De cualquier proposición, o conjunto de proposiciones, se pueden formar otras. El ejemplo más simple es el de formar con una proposición p la negación de p, designada por p'. También la conjunción de p y q, se representa por $p.q$. la disyunción inclusiva y la exclusiva de p y q, que se representan por $p + q$ y $p\Delta q$, respectivamente.

TEOREMA. El álgebra de proposiciones es un álgebra booleana.

Implicación material. Definiremos aun otra operación, llamada implicación material. Aunque la introducción de esta operación es innecesaria, es muy conveniente para traducir a símbolos las declaraciones redactadas, ya que ello ocurre con frecuencia, especialmente en proposiciones matemáticas.

Para dos proposiciones cualesquiera p y q, la proposición "si p entonces q" es muy conocida por todos. Antes de formular en símbolos una definición precisa, consideremos qué significado parece más razonable para esta proposición. Frecuentemente, en una declaración de un teorema matemático involucrando esta proposición, p y q están relacionadas de tal forma que q puede deducirse sistemáticamente de p. Impartir tal significado en el álgebra de proposiciones es imposible, porque nuestra definición de igualdad nos permite solamente considerar el valor verdad de proposiciones, no su significado. Entonces debemos limitar nuestra consideración a propiedades de valores verdad. Es intuitivamente evidente que si p es cierto y q es cierto, debemos también llamar cierta a la proposición "sí p entonces q" y obviamente la llamaremos falsa si p fuese cierto, pero q fuese falso. Definiremos la relación $\rightarrow$, llamada implicación material, por la ecuación $p \rightarrow q = p' + q$ para proposiciones arbitrarias p y q. En la proposición $p \rightarrow q$, p se llama el antecedente y q el consecuente de la implicación. Esta definición refleja las propiedades discutidas en el párrafo anterior. Recuerde que la palabra implica no significa que q pueda ser lógicamente deducido de p. No debe entenderse por $p \rightarrow q$ más que "o no p o q". Por ejemplo, la proposición "si 6 es un entero impar, entonces la luna está hecha de queso verde" es una proposición cierta porque el antecedente es falso.

Introduciremos otra relación que ocurre frecuentemente en matemáticas. Para dos proposiciones cualesquiera p y q, la relación $\leftrightarrow$, llamada equivalencia material, se define por la ecuación $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q)(q \rightarrow p)$.La proposición $p \leftrightarrow q$ usualmente se lee "p si y sólo si q". En general, $p \leftrightarrow q$, para proposiciones compuestas o simples p y q, es una proposición cierta exactamente en esos casos en que $p = q$.La diferencia en notación es necesaria para distinguir entre $p \leftrightarrow q$.que es una proposición, y $p = q$ que no es una proposición sino una declaración acerca de proposiciones.

Argumentos válidos. El problema central en la lógica simbólica es la investigación del proceso de razonamiento. En matemáticas, como en toda ciencia deductiva, no hay afirmaciones de verdad "absoluta". Más bien, se supone cierto conjunto de proposiciones sin demostración, y de este conjunto se deducen otras proposiciones por razonamiento lógico. Por ejemplo, cuando afirmamos la veracidad del teorema de Pitágoras decimos simplemente que puede ser deducido de los axiomas de la geometría euclidiana del plano. No es cierto, por ejemplo, para triángulos en la superficie de una esfera. Ahora procedemos a investigar aquellos procesos que serán aceptados como válidos en la deducción de una proposición, llamada la conclusión, de otras proposiciones dadas, llamadas las premisas.

Definimos un argumento como un proceso por medio del cual se llega a una conclusión a partir de premisas dadas. Un argumento es válido si y sólo si la conjunción de las premisas implica la conclusión; esto es, el argumento que produce una conclusión r a partir de las premisas $p_1, p_2, \dots, p_n$ es válido si y sólo si la proposición $(p_1 p_2 \dots p_n) \rightarrow r$ es una tautología. En general, hay tres maneras de verificar la validez de un argumento dado. La primera es verificarlo directamente de la definición usando una tabla de verdades; esto es, para el argumento anterior, el método de la tabla de verdades se usa para mostrar que $(p_1 p_2 \dots p_n) \rightarrow r$ es una tautología. El segundo método consiste en mostrar que la proposición $(p_1 p_2 \dots p_n) \rightarrow r$ puede ser reducida a 1, usando los métodos normales de simplificación. El tercero, y casi siempre el más simple de los tres es reducir el argumento a una serie de argumentos parciales, cada uno de los cuales se sabe de antemano ser válido como resultado de verificación previa. También tenemos el método por derivación. Dos de los argumentos válidos más usados son la regla de separación (también llamada modus ponendo) y la ley del silogismo. La regla de separación está dada por la forma

$$[p\ (p \rightarrow q)] \rightarrow q$$

Usaremos este arreglo esquemático en la presentación de todos nuestros argumentos. La premisa, o premisas, se enlistarán primero y la conclusión se dará abajo de una línea horizontal. Las razones o explicaciones pueden escribirse a la derecha de cada proposición.

La ley del silogismo está dada por la forma

$$[(p \rightarrow q)\ (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

La validez de este argumento, así como el de modus ponens, puede verificarse fácilmente por alguno de los dos primeros métodos mencionados previamente.

Es importante notar que un argumento es válido o inválido independientemente de la verdad, o falsedad de la conclusión.

Al verificar la validez de cualquier argumento, también supondremos que es permisible usar cualquiera de las siguientes reglas de substitución.

> REGLÁ 1. Todo argumento válido que involucre una variable proposicional permanecerá válido si toda aparición de una variable dada es reemplazada por una proposición específica.
>
> REGLA 2. Todo argumento válido permanecerá válido si cualquier aparición de una proposición es reemplazada por una proposición equivalente.

De la definición de un argumento válido se deduce inmediatamente que, además de todas las premisas dadas, se puede usar como premisa toda tautología del álgebra de proposiciones.

EL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS: Las clases o conjuntos se representan mediante los diagramas de Venn-Euler, y ello generan algunas regiones que son disjuntas que podrían en algún caso ser vacías, y llenan todo el universo. Luego de ello cualquier subconjunto del universo estará relacionado con estos conjuntos básicos, para ello construimos operaciones que van generando estos nuevos conjuntos que se escriben de manera algebraica. En este contexto se designa 1 al conjunto universal y 0 designa al conjunto vacío. La reunión de clases A y B, se denota por A+B, la intersección por AB, y el complemento de A por A’.

La relación de inclusión $A \subseteq B$ fue definida para indicar que el conjunto A está contenido en el conjunto B, equivale a XY’ = 0.

Se obtuvieron y demostraron las propiedades básicas:

Si $X \subseteq Y$y$Y \subseteq Z$, entonces $X \subseteq Z$.

Si $X \subseteq Y$y$X \subseteq Z$, entonces $X \subseteq YZ$.

Si $X \subseteq Y$, entonces $X \subseteq Y + Z$ para todoconjunto Z.

Si $X \subseteq Y$ si y sólo si $Y' \subseteq X'$.

RESULTADOS

CONCLUSIÓN VÁLIDA EN UNA INFERENCIA POR INCLUSIÓN DE CLASES

Dado un conjunto de premisas, que tendrán su equivalente en lógica de clases, y luego por inclusión obtendremos una conclusión válida. Primero se considera un entorno algebraico que consta de solo dos proposiciones simples, con las que generaremos las diferentes proposiciones compuestas posibles, dieciséis en total.

Así sean $p\ y\ q$, dos proposiciones simples, con las que sabemos que se pueden formar varias funciones proposicionales $f(p,q)$, como son:

Aquí vemos claramente que cada nueva función tendrá 4 valores que oscilan entre 0 (F) y 1 (V). Esto conforma 2^4 opciones diferentes, de acuerdo a los conectivos lógicos que se puedan usar:

		. . .
,		. ,
,		. ,

Los diferentes resultados se detallan a continuación

$$f_1(p,q) = p + p' = q + q'$$

$$f_2(p,q) = p' + q'$$

$$f_3(p,q) = p \rightarrow q = p' + q$$

$$f_4(p,q) = q \rightarrow p = p + q'$$

$$f_5(p,q) = p + q$$

$$f_6(p,q) = p'$$

$$f_7(p,q) = q'$$

$$f_8(p,q) = p\Delta q$$

$$f_9(p,q) = p \leftrightarrow q$$

$$f_1\ (p,q) = q$$

$$f_1\ (p,q) = p$$

$$f_1\ (p,q) = p'q'$$

$$f_1\ (p,q) = (q \rightarrow p)'$$

$$f_1\ (p,q) = (p \rightarrow q)'$$

$$f_1\ (p,q) = p$$

$$f_1\ (p,q) = pp' = 0$$

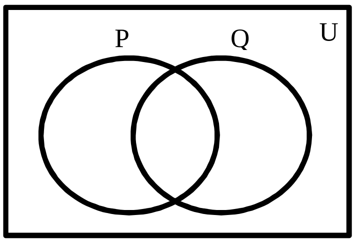
Ahora se pasa a la lógica de clases, donde se construirá las clases de los valores de verdad de una proposición. Para ello consideremos un determinado universo U, donde tengan cabida las proposiciones simples $p\ y\ q$, dadas anteriormente.

$$P = \{x \in U : p\ e.\ v \qquad\qquad \}$$

$$Q = \{x \in U : q\ e.\ v \qquad\qquad \}$$

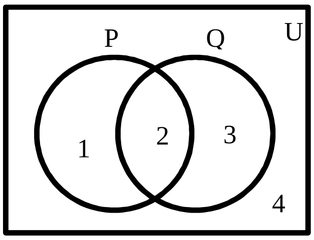
Así, habremos generado el siguiente diagrama de Venn-Euler

Diagrama de Venn- Euler para dos conjuntos



Lo que origina inmediatamente cuatro regiones disjuntas dos a dos, si estas 4 regiones fuesen no vacías, se tendría una colección de subclases que generan una partición de nuestro universo. Ahora le colocaremos un número a cada región

Diagrama de Venn- Euler para dos conjuntos



De donde se obtienen las siguientes subclases, que están apareadas con una de las 16 proposiciones dadas anteriormente, veámoslo

$$P = \{x \in U : p\ e.\ V\} = \{1; 2\}$$

$$Q = \{x \in U : q\ e.\ V\} = \{3; 2\}$$

$$Q' = \{x \in U : q\ n\ \ e.\ V\} = \{1; 4\}$$

$$P' = \{x \in U : p\ n\ \ e.\ V\} = \{3; 4\}$$

$$P \cup Q = \{x \in U : p\ e.\ V\ o\ q\ e.\ V\} = \{1; 2; 3\}$$

$$P \cap Q = \{x \in U : p\ e.\ V\ y\ q\ e.\ V\} = \{2\}$$

$$\emptyset = P \cap P' = \{x \in U: p\ e.\ V\ y\ p\ n\ \ e.\ V\} = \{\ \ \}$$

$$P - Q = \{x \in U: p\ e.\ V\ y\ q\ n\ \ e.\ V\} = \{1\}$$

$$Q - P = \{x \in U: q\ e.\ V\ y\ p\ n\ \ e.\ V\} = \{3\}$$

$$P' \cap Q' = \{x \in U: p\ n\ \ e.\ V\ y\ q\ n\ \ e.\ V\} = \{4\}$$

$$P \Delta Q = \{x \in U: O\ p\ e.\ V\ o\ q\ e.\ V\} = \{1; 3\}$$

$$P \leftrightarrow Q = \{x \in U: p\ e.\ V\ s\ , y\ s\ \ \ s\ q\ e.\ V\} = \{4; 2\}$$

$$P \rightarrow Q = \{x \in U: s\ p\ e.\ V, e\ \ \ \ \ q\ e.\ V\} = \{2; 3; 4\}$$

$$P' \cup Q' = \{x \in U: p\ n\ \ e.\ V\ o\ q\ n\ \ e.\ V\} = \{1; 3; 4\}$$

$$Q \rightarrow P = \{x \in U: s\ q\ e.\ V, e\ \ \ \ \ p\ e.\ V\} = \{1; 2; 4\}$$

$$U = P \cup P' = \{x \in U: p\ e.\ V\ o\ p\ n\ \ e.\ V\} = \{1; 2; 3; 4\}$$

También dieciséis conjuntos, igual que el total de funciones proposicionales, que se derivan de dos proposiciones simples. Así habremos generado las equivalencias entre estas algebras

En general se tiene que para n proposiciones simples, se generan en total 2^{2^n} funciones proposicionales. De igual forma si consideramos un universo U, en el cual se tiene n subclases formadas por los elementos para los cuales se da el valor verdadero de las proposiciones simples. Entonces también habrá 2^{2^n} nuevos subclases en total.

Ahora consideremos algunas utilidades de esta equivalencia, pero teniendo en cuenta las correspondencias en función a lo desarrollado en el párrafo anterior.

Ejemplo. Simplificar la siguiente expresión proposicional:

$$\{[(p \rightarrow q)] \vee p'] \wedge (p' \rightarrow q)\} \wedge [q \vee (p \Delta q)]$$

Solución

Esta es una función proposicional con dos proposiciones simples, lo cual genera un universo con dos clases, con el diagrama de Venn – Euler correspondiente

$$\{[(p \rightarrow q) \vee p'] \wedge (p' \rightarrow q)\} \wedge [q \vee (p \Delta q)]$$

Su equivalente en lógica de clases, será:

$$\{[(P \rightarrow Q) \cup P'] \cap (P' \rightarrow Q)\} \cap [Q \cup (P \Delta Q)]$$

En seguida simplificaremos esta expresión usando el método de las regiones, es decir cada expresión se reduce a un conjunto donde abarca solo números que corresponden a la o las regiones dadas por la expresión de clase

$$\{[(P \to Q) \cup P'] \cap (P' \to Q)\} \cap [Q \cup (P\Delta Q)] =$$
$$= \big\{\{2,3,4\} \cap \{1,2,3\}\big\} \cap \{2,3,1\} = \{2,3\} = Q$$

Entonces

$$\{[(P \to Q) \cup P'] \cap (P' \to Q)\} \cap [Q \cup (P\Delta Q)] = Q$$

Y en la expresión lógica tenemos

$$\{[(p \to q) \vee p'] \wedge (p' \to q)\} \wedge [q \vee (p\Delta q)] = q$$

Ejemplo 2. De los siguientes esquemas moleculares:

I. $(p\Delta q) \leftrightarrow (q\Delta p')$ II. $[p\Delta(p \vee q)]\Delta(q' \vee p)$ III.$(p \to q) \to q$

Verificar su validez

Solución

Igualmente hay dos proposiciones simples, lo cual genera un universo con dos conjuntos

Desarrollando cada ejercicio tenemos

I. $(p\Delta q) \leftrightarrow (q\Delta p')$

Usando las equivalencias dadas

$$(P\Delta Q) \leftrightarrow (Q\Delta P') = (P\Delta Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P) = \{1,3\} \leftrightarrow \{2,4\} = \big\{\{1,3\}\Delta\{2,4\}\big\}' = \emptyset$$

Entonces $(p\Delta q) \leftrightarrow (q\Delta p') = F$

Por lo que I es una contradicción.

II. $[p\Delta(p \vee q)]\Delta(q' \vee p)$

Estableciendo su equivalente

$$[P\Delta(P \cup Q)]\Delta(Q' \cup P) = \big\{\{1,2\}\Delta\{1,2,3\}\big\}\Delta\{1,4,2\} = \{1,2,3,4\} = U$$

Entonces $[p\Delta(p \vee q)]\Delta(q' \vee p) = V$

De donde II es una tautología.

III.$(p \to q) \to q$

Nuevamente usando las equivalencias

$$(P \to Q) \to Q = ((P - Q)' - Q)' = \big\{\{1\}' - \{2,3\}\big\}' = \{1,2,3\} = P \cup Q$$

Entonces $(p \to q) \to q = p \vee q$

De donde III es una contingencia.

Ejemplo 3. Hallar una expresión lógica M, para que la expresión proposicional

$$[p \wedge (\sim p \ \to \ q)\ ] \to M$$

Sea una tautología.

Solución

Como indica la función proposicional, esta tiene dos proposiciones simples

$$f(p,q) = [p \wedge (\sim p \rightarrow \ q)] \rightarrow M$$

Desarrollando con su equivalente en lógica de clases tenemos

$$[P \cap (P' \rightarrow Q)] \rightarrow M = [P \cap (P' - Q)'] \rightarrow M = \{3,4\} \cup M$$

Si se quiere que la expresión lógica resulte una tautología, entonces el resultado debe ser el universo, para ello M debe contener como mínimo al conjunto P.

Así tenemos que el conjunto M puede ser:

$M = \{1,2\} = P \quad M = \{1,2,3\} = P \cup Q \quad M = \{1,2,4\} = Q \rightarrow P \quad M = \{1,2,3,4\} = U$

De donde la expresión lógica para M:

$M = p, \quad M = p \vee q, M = q \rightarrow p, \quad M = p \vee p'$

Ejemplo 4: Simplificar, la formula proposicional:

$$(p' \leftarrow q) \downarrow \big[(q' \rightarrow p) \vee [p/(q \wedge p')]\big]$$

Solución

Usando el mismo método anterior tenemos que

$$(P' \leftarrow Q) \downarrow \big[(Q' \rightarrow P) \cup [P/(Q \cap P')]\big] = \{1,3,4\} \downarrow \big\{\{1,2,3\} \cup \{3,4,1,2\}\big\} = \{2\} = P \cap Q$$

De donde tenemos, que

$$(p' \leftarrow q) \downarrow \big[(q' \rightarrow p) \vee [p/(q \wedge p')]\big] = p \wedge q$$

Ejemplo 5: Indique cuál o cuáles de las siguientes inferencias son válidas:

$$i) \ \ [(p\Delta q) \wedge (q' \rightarrow r') \wedge r] \rightarrow p'$$

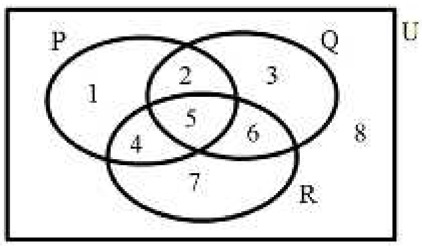
$$ii) \ \ [(p' \rightarrow q) \wedge (q' \vee r') \wedge (s' \rightarrow r)] \rightarrow (s \vee p)$$

$$ii\ ) \ \ [(p' \wedge q') \wedge (q' \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

Solución

En el caso uno hay tres proposiciones simples p, q y r, por lo que trabajaremos en un universo de tres conjuntos P, Q y R

Diagrama de Venn- Euler para tres conjuntos



La inferencia lógica es:

$$[(p\Delta q) \wedge (q' \rightarrow r') \wedge r] \rightarrow p'$$

Equivalentemente en lógica de clases se tiene

$$[(P\Delta Q) \cap (Q' \to R') \cap R] \to P' =$$
$$= \{6\} \to \{3,6,7,8\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = U$$

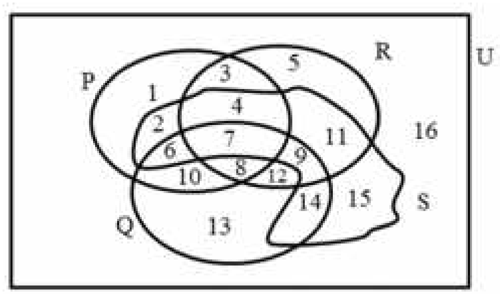
De donde la inferencia lógica es una tautología

$$[(p\Delta q) \wedge (q' \to r') \wedge r] \to p' = V$$

Lo cual indica que la validez de la inferencia.

En el caso dos hay cuatro proposiciones simples, por lo que trabajaremos en un universo de cuatro conjuntos

Diagrama de Venn- Euler para cuatro conjuntos



La expresión lógica es: $[(p' \to q) \wedge (q' \vee r') \wedge (s' \to r)] \to (s \vee p)$

Equivalentemente en términos de lógica de clases tenemos

$$[(P' \to Q) \cap (Q' \cup R') \cap (S' \to R)] \to (S \cup P) = U$$

De donde la inferencia lógica

$$[(p' \to q) \wedge (q' \vee r') \wedge (s' \to r)] \to (s \vee p) = V$$

Así la inferencia es válida.

$$ii\ )\ [(p' \wedge q') \wedge (q' \to s) \wedge (s \to r)] \to (p \to r)$$

En el caso tres hay cuatro proposiciones simples, por lo que trabajaremos en un universo de cuatro conjuntos

La expresión lógica es: $[(p' \wedge q') \wedge (q' \to s) \wedge (s \to r)] \to (p \to r)$

Equivalentemente en términos de lógica de clases tenemos

$$[(P' \cap Q') \cap (Q' \to S) \cap (S \to R)] \to (P \to R) = U$$

De donde la inferencia lógica

$$[(p' \wedge q') \wedge (q' \to s) \wedge (s \to r)] \to (p \to r) = V$$

Así la inferencia es válida.

En el caso particular de una inferencia, se tiene dos aspectos del problema en este trabajo de investigación:

1° Dada un conjunto de premisas, como obtener una conclusión, que haga válida la inferencia.

2° Dada una inferencia completa, verificar la validez de tal expresión.

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_m] \to q$$

En este esquema molecular de una inferencia puede haber n proposiciones simples, con n un entero positivo; el problema es cómo llegamos a la validez usando la metodología de la lógica de clases.

Tengamos en cuenta que este trabajo se hizo con la finalidad de obtener conclusiones validas, a partir de un conjunto de premisas. Usando la inclusión en lógica de clases.

Consideremos la inferencia siguiente, de m premisas y la conclusión:

$$[p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_m] \to q$$

Lo cual tendrá como ya sabemos su equivalente en la lógica de clases, donde cada expresión lógica tendrá su equivalente en conjuntos, así tenemos:

$$(P_1 \cap P_2 \cap \dots . \cap P_m) \to Q$$

Equivalentemente se tiene que

$$(P_1 \cap P_2 \cap \dots . \cap P_m)' \cup Q$$

Pero como se necesita que la inferencia sea válida, es decir una tautología. En la lógica de clases esto equivale a que, el conjunto resultante sea el universo. Entonces tenemos que:

$$(P_1 \cap P_2 \cap \dots . \cap P_n)' \cup Q = U$$

Tomando el complemento a la igualdad obtenida, resulta:

$$(P_1 \cap P_2 \cap \dots . \cap P_n) \cap Q' = \emptyset$$

Lo que equivalentemente se puede expresar en términos de inclusión

$$(P_1 \cap P_2 \cap \dots . \cap P_n) \subseteq Q$$

De donde podemos ver que la inferencia es válida siempre que, la intersección de los conjuntos equivalentes de cada premisa, sea un subconjunto del conjunto equivalente generado por la conclusión.

A manera de ejemplo, consideremos las premisas siguientes, de las cuales generamos algunas posibilidades de conclusión. Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo precedente.

Ejemplo: Deduzca una conclusión valida, a partir del siguiente conjunto de premisas dado.

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore \end{array}$$

Solución

Teniendo en cuenta que hay tres proposiciones simples, por lo que trabajaremos en un universo de tres conjuntos

La expresión lógica de las premisas es: $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)]$

En términos de lógica de clases tenemos

$$(P \rightarrow Q) \cap (Q \rightarrow R) = \{5,6,7,8\}$$

De donde, teniendo en cuenta el criterio dado, la premisa debe tener su equivalencia en un conjunto que contenga al conjunto obtenido. Además como el conjunto en cuestión tiene 4 elementos y le faltan otros 4 para ser el universo. La cantidad de posibles conjuntos es de 2^4 conjuntos.

Entre ellos tenemos:

$$\{5,6,7,8\} = (Q \cap R) \cup (P \cup Q)'$$

$$\{1,4,5,6,7,8\} = \{1,2\}' = (P - R)' = P \rightarrow R$$

$$\{2,3,5,6,7,8\} = \{1,4\}' == (P - Q)' = P \rightarrow Q$$

$$\ldots\ldots\ldots..$$

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8\} = U$$

Entonces algunas conclusiones para las que la inferencia sea válida, serán

$$p \rightarrow q$$

$$q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow r$$

$$\ldots\ldots$$

$$p \rightarrow (q \vee r)$$

Esta es la metodología para deducir una conclusión valida, a partir de un conjunto de premisas.

CONCLUSIONES

- De un conjunto de premisas, se obtiene una conclusión válida mediante la inclusión de clases, usando la equivalencia entre un algebra de proposiciones y el álgebra de clases.

- Se ha relacionado y operacionalizado las propiedades en la lógica de proposiciones con la lógica de clases.

- Se ha deducido proposiciones equivalentes usando la transformación a una clase, y luego regresando a la lógica de proposiciones.

- Se ha validado una conclusión de una inferencia, mediante inclusión de clases.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1) Dión Martinez, C. (1990). Curso de Lógica.Colombia: Ed. McGraw-Hill.
2) Guétmanova, A., Panov, M., & Petrov, V. (1991). Lógica: en forma simple sobre lo complejo. Moscu: Ed. Progreso.
3) Iglesias Otero, M. T. (2011). Matlab para Cálculo en una variable. Santiago de Compostela: Andavira.
4) Murillo Hernandez, W. J. (2010). La Investigacion Cientifica. Recuperado el 12 de Septiembre de 2012, de http://www.monografias.com/trabajos15/invest-cientifica/invest-cientifica.shtml
5) Páez, A. (2010). Introducción a la Lógica Moderna. Colombia: Ed. Uniandes.
6) Sominski, I. S. (1975). Método de Inducción Matemática. Moscu: Editorial Mir
7) Whitesii, J. "Boolean algebra and its applications", Addison Wesley, Reading (Mass) 1974.
8) Goodstein, D. "Boolean algebra". Pergamon, Oxford, 1975.