MATHEMA 3(1) 91-101
REVISTA DE INVESTIGACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
LAMBAYEQUE-PERÚ

Solución de ecuaciones lineales difusas con una variable utilizando el intervalo esperado de un número difuso

Solution of fuzzy linear equations with a variable using the expected interval of a fuzzy number

Mg. Richard Abramonte R.[1]
Mg. Edwin Lazo E.[2]
Bach. Yosbi Golles P.[3]
Dr. Flabio Gutiérrez S.[4]

RESUMEN

La lógica difusa se utiliza para modelar en forma matemática problemas donde los parámetros y/o variables son imprecisos. En este trabajo se resuelve, ecuaciones lineales con una sola variable y parámetros imprecisos, a esta ecuación se le denomina ecuación lineal difusa. La imprecisión se representa mediante números difusos triangulares. Para la solución de estas ecuaciones, diversos autores han propuesto diferentes métodos de solución, el método clásico, el método basado en el principio de extensión, el método basado en los alfa – corte y aritmética por intervalos, en este último método se obtiene como solución un número difuso y sus respectivos alfa cortes donde cada intervalo es una solución de la ecuación con un grado de precisión entre 0 y 1; en este trabajo se propone incorporar la definición del intervalo esperado de un número difuso al método basado en alfa corte y aritmética por intervalos, para proporcionar un único intervalo, donde se encuentre la mayor parte de soluciones de la ecuación lineal difusa.

Palabras claves: número difuso, intervalo esperado, aritmética difusa, alfa-corte, ecuaciones difusas.

ABSTRACT

Fuzzy logic is used to mathematically model problems where parameters and/or variables are imprecise. This work solves linear equations with a single variable and imprecise parameters, this equation is called the fuzzy linear equation. The imprecision is represented by triangular fuzzy numbers. To solve these equations, various authors have proposed different solution methods, the classical method, the method based on the principle of extension, the alpha-cut method and interval arithmetic, in the last method a fuzzy number and its respective alpha cuts are obtained as a solution where each interval is a solution of the equation with a degree of precision between 0 and 1; in this work we propose to incorporate the definition of the expected interval of a fuzzy number to the method based on alpha cut and interval arithmetic, to provide a single interval, where most of the solutions of the fuzzy linear equation are found.

Keywords: fuzzy number, expected Interval, fuzzy arithmetic, alpha- cut, fuzzy equations.

---

1. Universidad Nacional de Piura. Departamento de Matemática. richardalexabramonte@gmail.com
2. Universidad Cesar Vallejo. lazoedwin88@gmail.com
3. Universidad Nacional de Piura. Departamento de Matemática. ysbglls@gmail.com
4. Universidad Nacional de Piura. Departamento de Matemática. flabio@unp.edu.pe

INTRODUCCIÓN

La lógica difusa creada por Lofti Zadeh en 1965 aparece como un medio apropiado para representar y modelar un tipo de incertidumbre como es la imprecisión, que aparece en diversos problemas de la realidad. En este trabajo nos enfocamos en el caso de la ecuación lineal con datos imprecisos [1], como la imprecisión la representaremos con números difusos, a la ecuación se le denomina ecuación lineal difusa. Un tipo particular de conjunto difuso son los números difusos y son los adecuados para representar la imprecisión.

Para resolver las ecuaciones lineales difusas, se han propuesto diferentes métodos, uno de ellos es el método clásico, que tiene la desventaja que la solución no siempre existe [2].

Un segundo método es el método de alfa-corte y aritmética intervalar, este método, para cada alfa corte entre 0 y 1 obtiene como solución un intervalo [2].

En este trabajo se propone incorporar a este último método el concepto del intervalo esperado, para obtener un intervalo donde ocurran la mayor parte de soluciones de la ecuación lineal difusa.

MATERIAL Y MÉTODOS

1. Números difusos

Las definiciones han sido tomadas de [3].

Definición 1: Sea X el universo del discurso, un conjunto difuso Ã en X es un conjunto de pares:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)), x \in X\}$$

Donde $\mu_{\tilde{A}}: X \to [0\,,1]$ es llamada función de pertenencia. $\mu_{\tilde{A}}(x)$ representa el grado en que x pertenece al conjunto Ã.

En este trabajo, nos restringimos a conjuntos difusos en la recta real $\mathbb{R}$. Una función de pertenencia puede ser triangular, sigmoidal, trapezoidal, etc.

Definición 2: Un conjunto difuso $\tilde{A}$ en $\mathbb{R}$ se dice que es normal si para algún x de $\mathbb{R}$.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

Definición 3: El conjunto difuso Ã en $\mathbb{R}$ es convexo si para todo x, y, z que están en $\tilde{A}$, la relación x < y < z implica que

$$\mu_{\tilde{A}}[y] \geq m \quad [\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(z)]$$

Definición 4: Un número difuso es un conjunto difuso normal y convexo.

Definición 5: Un numero difuso triangular (ver Figura 1) es representado por $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$.

Definición 6: Un número difuso triangular $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ es positivo si y solo si $a_1 > 0$.

Definición 7: Dado un conjunto fuzzy $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x))\}$, se define el soporte de Ã.

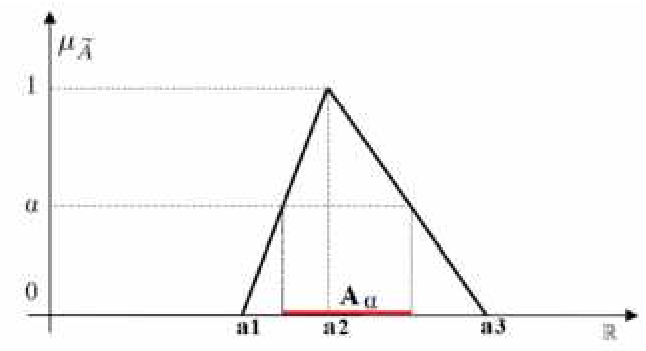
$$S \quad (\tilde{A}) = \{x \ \mathbb{R}, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

Definición 8: El conjunto alfa corte de un número difuso $\tilde{A}$ esta dado por el conjunto en $\mathbb{R}$ $A_\alpha = \{x \ \mathbb{R} / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\}$, con $\alpha \in [0, 1]$

Para un conjunto difuso con función de membresía de tipo triangular $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ (ver Figura 1) el alfa corte está dado por:

$$A_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]$$

Figura 1. Número difuso triangular.



El alfa corte es quizás el concepto más importante de los conjuntos difusos, porque mediante el ajuste del valor, se puede determinar el rango o conjunto de valores que satisfacen un determinado grado de pertenencia, el nivel de satisfacción, precisión del resultado o robustez del modelo [4].

Teorema 1: (Teorema de representación [5]) Si es $\tilde{A}$ un conjunto difuso y A_α sus alfa cortes, $\alpha \in [0, 1]$, se verifica que:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$$

1.1 Distribuciones de Posibilidad

La imprecisión (ambigüedad) se puede representar con distribuciones de posibilidad [6]. La medida de posibilidad de un evento puede ser interpretado como el grado de posibilidad de su ocurrencia en virtud de la distribución de posibilidad. Entre los diversos tipos de distribuciones, la triangular y la trapezoidal son los más comunes.

Formalmente, las distribuciones de posibilidad son números difusos, nos concentraremos sólo en las distribuciones de posibilidad triangulares $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$, el cual está determinado por tres cantidades: a_2 es el valor con más posibilidad de ocurrencia, a_1 y a_3 son los valores límites inferior y superior permitidos, respectivamente (Figura 1). Por ejemplo, estos valores límite pueden interpretarse como el más pesimista y el más optimista, en función del contexto

2. Operaciones aritméticas con intervalos

Definición 8: Las cuatro operaciones aritméticas básicas definidas en intervalos cerrados se define como sigue: suma, diferencia, multiplicación y división [7].

$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$

$[a,b] - [c,d] = [a-d, b-c]$

$[a,b].[c,d] = [\min\{a\ \ , a\ \ , b\ \ , b\ \ \}, \max\{a\ \ , a\ \ , b\ \ , b\ \ \}]$

$\frac{[a,b]}{[c,d]} = [\min\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}, \max\left\{\frac{a}{c}, \frac{a}{d}, \frac{b}{c}, \frac{b}{d}\right\}]$, siempre que $0 \notin [c,d]$

3. Intervalo Esperado de un número difuso

Dado un número difuso $\tilde{N}$. Si denotamos por $[N_\alpha^L, N_\alpha^R]$ con $\alpha\ \ [0,1]$ a los conjuntos de nivel α o α-cortes, se define el intervalo esperado de $\tilde{N}$ [8].

$$E\ (\tilde{N}) = [\int_0^1 N_\alpha^L d\ \ \ , \int_0^1 N_\alpha^R d\ \ \ ]$$

El intervalo esperado de un número difuso, es un intervalo que concentra la mejor información de un número difuso, esta definición será de gran utilidad para encontrar la mejor solución de todas las que se obtienen mediante el método de alfa corte y aritmética por intervalos cuando se resuelva una ecuación lineal difusa.

Si $\tilde{N} = (a_1, a_2, a_3)$ es un número difuso triangular, su intervalo esperado está dado por:

$$E = \left[\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}\right]$$

4. Ecuación lineal difusa

La imprecisión de los parámetros de la ecuación, lo representaremos con números difusos triangulares de la forma $\ddot{A} = (a_1, a_2, a_3)$, es decir, el valor del parámetro con más posibilidad de ocurrencia es a_2, pero puede ocurrir entre a_1 y a_3 .

Sean $\ddot{A}$,$\ddot{B}$ y $\ddot{C}$ números difusos triangulares de la forma $\ddot{A} = (a_1, a_2, a_3)$, $\ddot{B} = (b_1, b_2, b_3)$ y $\ddot{C} = (c_1, c_2, c_3)$, entonces la ecuación lineal con datos imprecisos (ecuación lineal difusa) se define por:

$$\ddot{A}x + \ddot{B} = \ddot{C}$$

Uno de los métodos que se propusieron para resolver esta ecuación fue el de alfa corte y aritmética intervalar [2]. Este método determina una solución en función de cada alfa corte, a este método incorporamos el concepto del intervalo esperado.

4.1 Método de alfa corte y aritmética por intervalos

Este método consiste en obtener la solución de una ecuación lineal clásica, es decir, sin imprecisión, a continuación se reemplazan los alfa cortes de los números difusos que representan a los parámetros imprecisos, luego se simplifica mediante la aritmética por intervalos [2].

Dada la ecuación lineal difusa

$$\ddot{A}x + \ddot{B} = \ddot{C}$$

Asumiendo que $0 \notin S \quad (\ddot{A})$

Para encontrar la solución se siguen los siguientes pasos

Paso 1: Se determinan el alfa corte de los números difusos $\ddot{A}$, $\ddot{B}$ y $\ddot{C}$.

Paso 2: Se reemplazan los alfa cortes en la ecuación:

$$x = \frac{\ddot{C} - \ddot{B}}{\ddot{A}}$$

$$x(\alpha) = \frac{c[\alpha] - b[\alpha]}{a[\alpha]}$$

Paso 3: Se simplifica la ecuación utilizando las definiciones de la aritmética por intervalos.

$$x(\alpha) = \frac{[c_1(\alpha), c_2(\alpha)] - [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]}{[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]}$$

Se realiza la diferencia de intervalos

$$x(\alpha) = \frac{[c_1(\alpha) - b_2(\alpha), c_2(\alpha) - b_1(\alpha)]}{[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]}$$

Y luego la división intervalar.

$$x1(\alpha) = \min\{\frac{c_1(\alpha) - b_2(\alpha)}{a_1(\alpha)}, \frac{c_1(\alpha) - b_2(\alpha)}{a_2(\alpha)}, \frac{c_2(\alpha) - b_1(\alpha)}{a_1(\alpha)}, \frac{c_2(\alpha) - b_1(\alpha)}{a_2(\alpha)}\}$$

$$x2(\alpha) = \max\{\frac{c_1(\alpha) - b_2(\alpha)}{a_1(\alpha)}, \frac{c_1(\alpha) - b_2(\alpha)}{a_2(\alpha)}, \frac{c_2(\alpha) - b_1(\alpha)}{a_1(\alpha)}, \frac{c_2(\alpha) - b_1(\alpha)}{a_2(\alpha)}\}$$

$$\forall \alpha \in [0,1]$$

La solución de la ecuación lineal difusa con un grado de precisión $\alpha \in [0,1]$, es un intervalo $x(\alpha) = [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$.

Estos intervalos son los conjuntos alfa corte del conjunto difuso que es la solución de la ecuación lineal difusa.

De acuerdo al Teorema 1, el conjunto difuso que es la solución de la ecuación lineal difusa está dada por:

$$\ddot{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha\, [x_1(\alpha), x_2(\alpha)]$$

Los valores más utilizados son $\alpha = \{0.0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0\}$, la solución más robusta (mas imprecisa) se obtiene con $\alpha = 0$, y la solución más precisa (exacta) se obtiene con $\alpha = 1$.

Se incorpora el concepto del intervalo esperado al método de alfa cortes.

Paso 4: Se calcula el intervalo esperado de $x(\alpha)$.

$$I.\ (x(\alpha)) = [\int_0^1 x_1(\alpha)d\ \ , \int_0^1 x_2(\alpha)d\ \ ,]$$

En este intervalo, se encuentra la mayor parte de soluciones de la ecuación lineal difusa. Este intervalo corresponderá a un único $\alpha \in [0,1]$,

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Caso de estudio I: Consideremos la siguiente ecuación lineal

$$\ddot{A}x + \ddot{B} = \ddot{C}$$

Donde $\ddot{A}, \ddot{B}, \ddot{C}$ son los números difusos triangulares $\ddot{A} = (1,2,3)$, $\ddot{B} = (5,6,7)$, $\ddot{C} = (7,11,15)$

Para hallar la solución aplicamos los pasos 1 al 4 de la Subsección 4.1

Paso 1: Hallamos el alfa corte de los números difusos triangulares:

$A[\alpha] = [1 + \alpha(2-1), 3 - \alpha(3-2)]$, $B[\alpha] = [5 + \alpha(6-5), 7 - \alpha(7-6)]$,

$C[\alpha] = [7 + \alpha(11-7), 15 - \alpha(15-11)]$

$A[\alpha] = [1 + \alpha, 3 - \alpha]$, $B[\alpha] = [5 + \alpha, 7 - \alpha]$, $C[\alpha] = [7 + 4\alpha, 15 - 4\alpha]$

Paso 2: Remplazamos el alfa corte en la solución:

$$x(\alpha) = \frac{c[\alpha] - b[\alpha]}{a[\alpha]}$$

$$x(\alpha) = \frac{[7 + 4\alpha, 15 - 4\alpha] - [5 + \alpha, 7 - \alpha]}{[1 + \alpha, 3 - \alpha]}$$

Paso 3: Se simplifica mediante la aritmética por intervalos.

Se aplica la diferencia de intervalos en el numerador

$$x(\alpha) = \frac{[(7 + 4\alpha) - (7 - \alpha), (15 - 4\alpha) - (5 + \alpha)]}{[1 + \alpha, 3 - \alpha]}$$

$$x(\alpha) = \frac{[5\alpha, 10 - 5\alpha]}{[1 + \alpha, 3 - \alpha]}$$

Se realiza la división entre intervalos

$$x(\alpha) = [\min\{\frac{5\alpha}{1+\alpha}, \frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}, \frac{10-5\alpha}{3-\alpha}\}, \max\{\frac{5\alpha}{1+\alpha}, \frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}, \frac{10-5\alpha}{3-\alpha}\}]$$

Dado que $\alpha \in [0,1]$, entonces:

$$x(\alpha) = [\frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}]$$

La solución de la ecuación lineal difusa es el conjunto difuso:

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \, [\frac{5\alpha}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha}{1+\alpha}]$$

$$\tilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} [\frac{5\alpha^2}{3-\alpha}, \frac{10-5\alpha^2}{1+\alpha}]$$

La gráfica del conjunto difuso $\tilde{A}$ es $\tilde{A} = \tilde{A}_L \cup \tilde{A}_R$ donde

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_L = \left\{ \left(\frac{5\alpha^2}{3-\alpha}, \alpha \right), \;\; \alpha \in [0,1] \right\}$$

$$\tilde{\boldsymbol{A}}_R = \left\{ \left(\frac{10-5\alpha^2}{1+\alpha}, \alpha \right), \;\; \alpha \in [0,1] \right\}$$

El punto de intersección de las curvas $\tilde{A}_L \;\, y \;\, \tilde{A}_R$ ocurre en:

$$\frac{5\alpha^2}{3-\alpha} = \frac{10-5\alpha^2}{1+\alpha}$$

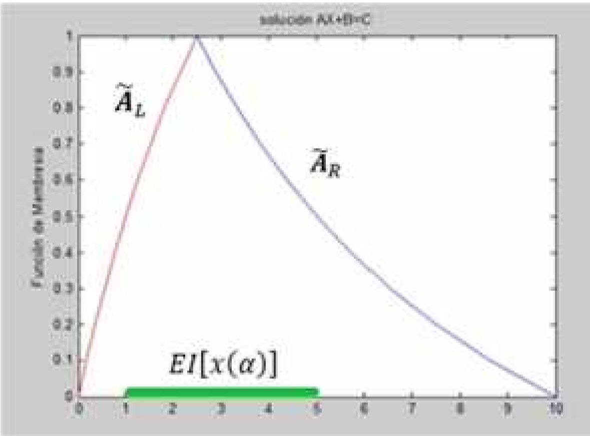
$$2\alpha^2 + \alpha - 3 = 0$$

Dado que $\alpha \in [0,1]$, la solución de la ecuación es $\alpha = 1$, el cual corresponde a un valor de

$$x = \frac{5(1^2)}{3-1} = 2.5$$

El gráfico del conjunto difuso $\tilde{A}$ se puede ver en la Figura 2.

Figura 2 Solución de la ecuación lineal difusa



El conjunto difuso obtenido es normal y convexo, entonces es un número difuso (Ver Definición 4). La solución de la ecuación lineal difusa ocurrirá con más posibilidad en 2.5, pero puede ocurrir entre 0 y 10.

La solución de la ecuación lineal difusa con diferentes grados de precisión se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1
Alfa cortes de la solución de la ecuación lineal de primer grado

Grado de precisión α	Solución de la ecuación lineal difusa Alfa corte x(α)
0.0	[0 , 10]
0.1	[0.17 , 8.64]
0.2	[0.36 , 7.50]
0.3	[0.56 , 6.54]
0.4	[0.77 , 5.71]
0.5	[1.00 , 5.00]
0.6	[1.25 , 4.38]
0.7	[1.52 , 3.82]
0.8	[1.82 , 3.33]
0.9	[2.14 , 2.89]
1.0	[2.50 , 2.50]

La solución más robusta (más imprecisa) es el intervalo [0, 10], se obtiene con $\alpha = 0$. La solución más precisa (exacta) es el intervalo [2.50, 2.50], se obtiene con $\alpha = 1$; este intervalo es el número real x = 2.5. Para un grado $\alpha = 0.5$, la solución es el intervalo [1 , 5].

Es decir, se tiene diferentes alternativas para elegir el intervalo de solución con la precisión que se desee.

Paso 4: Se evalúa el intervalo esperado de $x(\alpha)$.

$$E\ [x(\alpha)] = [\int_0^1 \frac{5\alpha}{3-\alpha} d \quad , \int_0^1 \frac{10-5\alpha}{1+\alpha} d \quad]$$

$$E\ [x(\alpha)] = [1.081\ , \qquad 5.317]$$

Dado que los intervalos solución con diferentes grados de precisión $\alpha \in [0,1]$ son infinitos, si se desea un intervalo donde posiblemente ocurran la mayoría de soluciones de la ecuación lineal difusa, este es el intervalo esperado [1.081 , 5.317] (ver Figura 2).

CONCLUSIONES

1. El método de alfa corte y aritmética por intervalos, permite encontrar el número difuso que es la solución de la ecuación lineal difusa, así mismo, permite hallar un intervalo de solución para cada grado de precisión entre 0 y 1.
2. La incorporación del concepto de intervalo esperado de un número difuso, al método de alfa corte, permite obtener un único intervalo donde se espera que ocurran la mayoría de soluciones de la ecuación lineal difusa. Este intervalo corresponde a un único $\alpha \in [0,1]$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ZADEH, Lotfi A. Fuzzy sets. Information and control, 1965, vol. 8, no 3, p. 338-353.

[2] BUCKLEY, James J.; ESLAMI, Esfandiar; FEURING, Thomas. Solving fuzzy equations. En Fuzzy mathematics in economics and engineering. Physica, Heidelberg, 2002. p. 19-44. ISBN 3-7908-1456-3.

[3] CÁRDENAS, J.; VERDEGAY, J. Modelos de optimización con datos imprecisos Servicio de Publicaciones. Universidad de Murcia, 1999. ISBN 8371-808-3.

[4] GUTIÉRREZ, Flabio, et al. Un modelo de optimización difusa para el problema de atraque de barcos. Investigación operacional, 2018, vol. 38, no 2, p. 160-168.

[5] NEGOIŢĂ, Constantin Virgil; RALESCU, Dan A. Applications of fuzzy sets to systems analysis. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 1975.

[6] ZADEH, Lotfi Asker. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy sets and systems, 1978, vol. 1, no 1, p. 3-28

[7] REINA, Daniel; MOSCOVITZ, Leonardo Jiménez; LORENZ, Fundación Universitaria Konrad. Fundamentos de matemática difusa. Fundación Universitaria Konrad Lorenz, Facultad de Matemáticas, 2008, p. 30-41.

[8] HEILPERN, Stanisław. The expected value of a fuzzy number. Fuzzy sets and Systems, 1992, vol. 47, no 1, p. 81-86.