MATHEMA 3(1) 103-111
REVISTA DE INVESTIGACIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO
LAMBAYEQUE-PERÚ

Metamodelos en el aprendizaje del Análisis Matemático en la Escuela Profesional de Matemáticas de la UNPRG

Metamodels in the mathematical analysis learning at the Proffesional School of Mathematics of the UNPRG

Dra. Gloria María Ortiz Basauri[1]
Dr. Eduar Vásquez Sánchez[2]

RESUMEN

El objetivo de la investigación fue determinar la influencia de metamodelos en el aprendizaje del análisis matemático en el quinto ciclo de la carrera profesional de matemáticas. Para cumplir con este propósito se desarrollaron metamodelos generativos, de estructuración, de enlaces, de transformación y de composición, elaborando guías de trabajo involucrando representaciones, conceptos y proposiciones del aprendizaje significativo. Se trabajaron conjuntos finitos e infinitos, conjuntos enumerables y no enumerables, cuerpo de los números reales, sucesiones y series, topología en la recta, límites, funciones continuas, funciones derivables. En el metamodelo de enlace se obtuvo el mejor resultado, se desarrollaron las capacidades de análisis, síntesis y la relación de correspondencia entre afirmaciones y justificaciones en la demostración de teoremas; el metamodelo de estructuración, permitió desarrollar la interpretación mental de la situación problemática. Los metamodelos permitieron mejorar los rendimientos académicos en el Análisis Matemático.

Palabras Clave: Metamodelos, análisis matemático, aprendizaje.

ABSTRACT

The aim of this research was to determine the influence of metamodels in the mathematical analysis learning in the fifth cycle of the professional school of mathematics. For this purpose, the different types of metamodels, generative, structuring, linking, transforming and compositional were applied preparing working guides involving representations, concepts and proposition of meaningful learning. We worked with finite and infinitive set, enumerable and not numerable sets, the field of real numbers, sequence and series, topology on the set of real numbers, limits, continuous function and derivable function. The best result was obtained in the link metamodel, the analysis, synthesis and correspondence relationships between statements and justifications were developed in the theorem proofs; the structuring metamodel allowed the mental interpretation of the problematic situation to be developed. The metamodels allowed the academic performance on mathematical analysis to improve.

Key Words: Metamodels, mathematic analysis, learning.

1. UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO, Departamento de Matemáticas, gortiz@unprg.edu.pe
2. UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO, Departamento de Estadística, evasquez@unprg.edu.pe,

INTRODUCCIÓN

El interés de cada profesional de educación es lograr que sus estudiantes adquieran conocimientos apropiándose de algunas metodologías de aprendizaje. Enseñar matemáticas en la universidad es cuestionar la educación desde la formación inicial fundamentalmente por encontrar que el estudiante no tiene condiciones adecuadas para asimilar la matemática desde la base conceptual y procedimental, de allí la necesidad de proponer una estrategia que en su metodología tenga aspectos de entrenamiento del alumno para formar competencias en la forma de pensar para enfrentar el aprendizaje del análisis matemático.

El principal objetivo de todo profesor es que sus enseñanzas sean aprendidas por sus alumnos, pero a pesar de trasmitirlas adecuadamente en muchos casos no se producen esos aprendizajes deseados, o cuando menos, no se producen de la forma adecuada. Son alumnos que no han desarrollado suficientemente las estrategias de aprendizaje y las habilidades metacognitivas que les ayudarán a realizar un aprendizaje satisfactorio con menor esfuerzo y mejor rendimiento de sus capacidades.(Allueva, 2002, p. 59)

“La metacognición es un proceso que envuelve la toma de conciencia y comprensión de los propios saberes y práctica, la reflexión y la auto-regulación del propio aprendizaje y práctica” (Ferreira, 2003)

“La manera de estar seguros que los estudiantes han comprendido es a través de preguntas de comprensión, dada que la comprensión implica interpretación, traducción, ejemplos y definición. En la interpretación, el estudiante desarrolla habilidad de identificar y comprender la idea fundamental para comunicar y la relación entre éstas. La traducción, implica el cambio de ideas de una forma de comunicación a otra paralela, conservando el significado. Una manera en la cual un estudiante puede demostrar que ha comprendido una idea, consiste en proporcionar un ejemplo de la misma. “Finalmente, los estudiantes deben reconstruir con sus propias palabras una definición del término o concepto que deban comprender” (Orlich et al., 1994, pp. 126-128)

“Piaget afirma que el conocimiento lógico-matemático se produce por medio de la abstracción reflexiva, mientras que el conocimiento científico requiere tanto abstracción empírica como reflexiva, lo que podría sugerir que los contextos de justificación para estos dos tipos de conocimiento podrían ser diferentes” (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 842). “Los educadores matemáticos están también interesados en observar y explicar los procesos de descubrimiento matemático realizados tanto por los expertos matemáticos como por los estudiantes”. (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 829)

El análisis matemático obliga al estudiante a desarrollar las operaciones lógicas de análisis, síntesis, crítica y son los metamodelos una de las estrategias adecuadas que permiten al estudiante aprender el análisis matemático. Los metamodelos como estrategia de aprendizaje son una ayuda para la generación de ideas válidas para la invención, reconstrucción y solución de problemas matemáticos.

Se entiende por metamodelos cada uno de las distintas clases de modelos de situaciones problemáticas presentadas a la actividad del alumno, capaces de generar ideas válidas para la resolución de problemas matemáticos. Los metamodelos propuestos incidieron en la participación activa de los estudiantes, por el interés despertado, ya que se trabajó con información del contexto. (Fernández, 2013)

Los metamodelos utilizados como una estrategia didáctica fueron:

- “Metamodelos generativos que son las primeras situaciones a las que se enfrente el alumno, permitiendo desarrollan la confianza y seguridad de los alumnos, ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Ayudan a percibir la estrategia como vía de solución y buscar la operación válida para dar cuerpo al proceso de resolución. En este modelo el número es algo secundario. Desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad respecto a las ideas de los demás”. (Fernández, 2013)
- “Metamodelos de estructuración permiten estructurar mentalmente las partes que componen el problema, sus dimensiones son; Enunciado, pregunta, resolución,

solución. Los modelos ayudan a distinguir la solución de la resolución del problema éste y es capaz de estimar con razonamiento lógico la validez del resultado debido a que ha utilizado la reversibilidad de los procesos operativos como técnica de verificación. Se es consciente de que un mismo resultado se puede corresponder con diferentes situaciones planteadas; donde un alumno suma, otro resta. Del mismo modo se es consciente de que una misma operación o conjunto de operaciones da lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones. Se observan interesantes razones para respetar las ideas de los demás.” (Fernández, 2013)

- “Metamodelos de enlaces ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado-pregunta-solución; se trabaja con variables de relación entre estas partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias. Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo. Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones. No interviene el azar en la utilización de los datos; se percibe el significado de éstos dentro de la situación problemática. Se comprende que no todos los problemas presentan datos numéricos y que no todos los datos de un problema son numéricos.”(Fernández, 2013)
- “Metamodelo de transformación utilización de una diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Hay un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones. Utilización de método de Análisis y método de síntesis. Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.” (Fernández, 2013)
- “Metamodelos de composición ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección. Consciencia de la necesidad de lectura tantas veces como sea necesaria. Utilización de método de Análisis, de síntesis y de análisis-síntesis.” (Fernández, 2013)

Temáticas del análisis matemático.

Con respecto al contenido de análisis matemático se trabajaron los siguientes tópicos: Conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos enumerables y no enumerables. Cuerpo de los números reales. Sucesiones y series. Topología en la recta. Límites de funciones. Funciones continua. Funciones derivable. (Lima, 2004)

Toda estrategia didáctica debe dar cuenta de un aprendizaje significativo, el mismo que modifique la estructura cognitiva del estudiante como lo afirma Ausubel quién, a su vez, distingue tres tipos de aprendizaje:

- “Aprendizaje de Representaciones, es el más elemental del cual dependen los demás tipos de aprendizaje. Consiste en la atribución de significados a determinados símbolos, ocurre cuando se igualan en significado símbolos arbitrarios con sus referentes (objetos, eventos, conceptos) y significan para el alumno cualquier significado al que sus referentes aludan.”(Ausubel, 1983)
- “Aprendizaje de Conceptos, que se definen como "objetos, eventos, situaciones o propiedades de que posee atributos de criterios comunes y que se designan mediante algún símbolo o signos” partiendo de ello podemos afirmar que en cierta forma también es un aprendizaje de representaciones. Los conceptos son adquiridos a través de dos procesos: formación y asimilación. En la formación de conceptos, los atributos de criterio (características) del concepto se adquieren a través de la experiencia directa, en sucesivas etapas de formulación y prueba de hipótesis. El aprendizaje de conceptos por asimilación se produce a medida que se configuran las nuevas relaciones, pues los atributos de criterio de los conceptos se pueden definir usando las combinaciones disponibles en la estructura cognitiva.” (Ausubel, 1983)
- “Aprendizaje de proposiciones, aquel que va más allá de la simple asimilación de lo que representan las palabras, combinadas o aisladas, puesto que exige captar el significado de las ideas expresadas en forma de proposiciones. El aprendizaje de proposiciones implica la combinación y relación de varias palabras cada una de las cuales constituye un referente unitario, luego estas se combinan de tal forma que la idea resultante es más que la simple suma de los significados de las palabras componentes individuales, produciendo un nuevo significado que es asimilado a la

estructura cognoscitiva. Es decir, que una proposición potencialmente significativa, expresada verbalmente, como una declaración que posee significado denotativo (las características evocadas al oír los conceptos) y connotativo (la carga emotiva, actitudinal e idiosincrática provocada por los conceptos) de los conceptos involucrados, interactúa con las ideas relevantes ya establecidas en la estructura cognoscitiva y, de esa interacción, surgen los significados de la nueva proposición". (Ausubel, 1983)

MATERIALES Y MÉTODOS

El diseño para desarrollar la investigación fue un estudio de caso, los metamodelos se aplicaron a siete estudiantes del quinto ciclo de matemática matriculados en el curso de análisis matemático durante el ciclo académico 2018-I, se realizaron cuatro controles, independientes de la prueba de entrada y salida, la evaluación se realizó por pregunta según el tipo de metamodelo promediando la nota del grupo, desde inicio se presentaron guías de trabajo con las diferentes características de los metamodelos. En los ejercicios generativos se les pidió construir un algoritmo para resolver el ejercicio sin resolverlo; con el propósito de lograr la resolución lógica del mismo, esto favorece a reforzar conceptos y propiedades de los conceptos involucrados en el problema. Los ejercicios de enlaces se realizaron para desarrollar la capacidad de identificar las justificaciones de cada afirmación en el proceso de una demostración. Los de transformación se trabajaron para conocer que la afirmación dada es verdadera, se le pide intercambiar palabras o proposiciones, formular una nueva afirmación para su posterior construcción. En aquellos de estructura se trabajó la interpretación mental de las partes en un problema: Enunciado, pregunta, resolución, solución. Ya en los ejercicios de composición se les pidió completar enunciado y demostrar el teorema, desarrollando así, memoria, análisis, síntesis y pensamiento reversible. El procesamiento de los datos se realizó con promedio y desviación estándar por pregunta según el metamodelo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En los metamodelos de enlaces en los cuales se desarrolla fundamentalmente las relaciones entre variables de problemas, dar justificaciones a las afirmaciones en la demostración de un teorema se obtuvieron los mejores resultados. En el metamodelo de estructura que permite la interpretación mental de la situación problemática concatenando, enunciado, pregunta, resolución y solución se lograron resultados satisfactorios. En el metamodelo generativo que ayuda a generar ideas, a utilizar el razonamiento lógico, a percibir las estrategias de solución de los problemas, se lograron resultados medianamente satisfactorios. No se obtuvieron resultados satisfactorios en los metamodelos de trasformación y composición, probablemente se deba a que estos metamodelos se necesita la argumentación, sobre todo una interpretación estructurada de la solución y demostración en el análisis matemático del quinto ciclo de matemática pura. Tabla 1 y 2.

Se hizo hincapié en el uso de representaciones, conceptos y proposiciones.

Tabla 1
Calificaciones por preguntas en las pruebas de proceso según los tipos de metamodelos en el aprendizaje del análisis matemático en alumnos del quinto ciclo de la escuela profesional de matemática de la UNPRG.

METAMODELO -CARACTERISTICAS	Promedio en la pruebas de proceso				Promedio de Pruebas	Prueba de salida
	I	II	III	IV		
Generativo. "Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento. Ayudan a percibir la estrategia de solución, desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia y colaboración." (Fernández, 2013)	1.2	1.1	1.5	1.5	1.3 ± 0.17	1.43 ±1.27
Composición. "Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección." (Fernández, 2013)	1.8	1.5	1.9	1.4	1.6 ± 0.25	1.14±1.46
Enlaces. "Buscan la concordancia lógica: enunciado- pregunta-solución. Relacionan variables sintácticas, lógicas, matemáticas. Desarrollan la atención y prudencia. No todos los problemas presentan datos numéricos." (Fernández, 2013)	2.8	3.2	3.4	3.8	3.3 ± 0.24	3.28±1.25
Transformación. "Favorecen el dinamismo de relaciones mentales que desarrollan el pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Utilizan el análisis y la síntesis. Establecen relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas." (Fernández, 2013)	0.6	0.6	0.5	0.6	0.57 ± 0.04	0.43±0.53
Estructura. "Ayudan a estructurar mentalmente las partes del problema: Enunciado, pregunta, resolución, solución. Permiten la interpretación mental de la situación problemática, la elección de operaciones matemáticas para la resolución de las estrategias, la distinción entre la solución y la resolución del problema. Utiliza la reversibilidad y verificación de los procesos operativos." (Fernández, 2013)	1.9	2.2	2.3	2.4	2.2 ± 0.18	2.14±1.07

Fuente. Pruebas de análisis matemático

Tabla 2

Calificaciones de la prueba de entrada, y salida de análisis matemático según los tipos de modelos en estudiantes del quinto ciclo de la escuela profesional de matemática de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

PROBLEMAS	METAMODELO-CARACTERISTICAS	P.E	P.S
1. Escriba un algoritmo para la demostración. Sea $X \subset N$. Pruebe que si X es finito, entonces X posee un elemento mayor. (3)*	Generativo. "Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento. Ayudan a percibir la estrategia de solución, desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia y colaboración." (Fernández, 2013)	0.67 ± 0.82	1.43 ± 1.27
2. Complete el problema, luego resuélvalo. "Sea $A \subset IR$ un subconjunto cerrado y limitado" (.3)*	Composición "Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección" (Fernández, 2013)	0.66 ± 1.03	1.14 ± 1.46
3. Justifique cada paso de la demostración de la siguiente afirmación."Sean $X \subset IR$, $a \in X$, $f: X \rightarrow IR$. Para que exista lím f(x) es necesario y suficiente que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ se pueda obtener $\delta > 0$, tal que si $x \in X$, $y \in X$, $0 < \lvert x - a\rvert < \delta$, $0 < \lvert y - a\rvert < \delta$, impliquen que $\lvert f(x) - f(y)\rvert < 0$. (4)*	Enlaces. "Buscan la concordancia lógica: enunciado- pregunta-solución. Relacionan variables sintácticas, lógicas, matemáticas. Desarrollan la atención y prudencia. No todos los problemas presentan datos numéricos." (Fernández, 2013)	1.00 ± 0.63	3.28 ± 1.25
4. Considere el siguiente teorema: Sea $f: X \rightarrow IR$ uniformemente continua. Si (x_n) y es una sucesión de Cauchy en X, entonces $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy. ¿El teorema seguirá cumpliéndose si se cambia uniformemente continua por continua? De un contraejemplo. (4)*	Transformación. "Favorecen el dinamismo de relaciones mentales que desarrollan el pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Utilizan el análisis y la síntesis. Establecen relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas." (Fernández, 2013)	0.0 ± 0.0	0.4 ± 0.53
5. Redacte un problema con los siguientes datos. Función continua en un intervalo cerrado y derivable en un intervalo abierto. Además, sea c un punto interior al intervalo. (3)*	Estructura. "Ayudan a estructurar mentalmente las partes del problema: Enunciado, pregunta, resolución, solución. Permiten la interpretación mental de la situación problemática, la elección de operaciones matemáticas para la resolución de las estrategias, la distinción entre la solución y la resolución del problema. Utiliza la reversibilidad y verificación de los procesos operativos." (Fernández, 2013)	0.33 ± 0.52	2.14 ± 1.07

*ponderación de la pregunta. P.E =Prueba Entrada; P.S=Prueba Salida

CONCLUSIONES

1. La aplicación de los metamodelos permite homogenizar el grupo de estudio en cuanto a sus rendimientos académicos, confirmando de este modo la influencia de los metamodelos en el aprendizaje del análisis matemático.

2. En el metamodelo de enlace se obtuvo el mejor resultado, permitió desarrollar las capacidades de análisis, síntesis y la relación de correspondencia entre afirmaciones y justificaciones en la demostración de teoremas, en las preguntas desarrolladas en este tipo de metamodelo se obtuvo un promedio de 3.28±1.25 de cuatro puntos.

3. En el metamodelo de estructuración, se logró 2.14±1.07 de tres puntos, buen desempeño en la interpretación mental de la situación problemática, la elección de operaciones matemáticas para las estrategias de resolución de problemas demostraron, la distinción entre la solución y la resolución del problema.

4. En el metamodelo de tipo generativo se logró un promedio de 1.43±1.27 de tres puntos, en lo que se refiere a generar la estrategia de solución de los problemas, así como, la lógica del razonamiento de la resolución se tuvo la mayor dificultad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Allueva, P. (2002). Conceptos básicos sobre metacognición. In *Desarrollo de habilidades metacognitivas: programa de intervención.* (pp. 59-87). Consejería de Educación y Ciencia. Diputación General de Aragón. https://ice.unizar.es/sites/ice.unizar.es/files/users/leteo/materiales/concepto-de-metacognicion-pallueva.pdf

Ausubel, D. (1983). Teoría del aprendizaje significativo. *Fascículos de CEIF*, *1*, 1-10.

Fernández, J. (2013). Metamodelos y modelos de situaciones problemáticas. *grupomayeutica*. https://grupomayeutica.files.wordpress.com/2013/04/21-metamodelos.pdf

Ferreira, A. (2003). *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo* Universidade Estadual de Campinas]. Campinas. http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/252812

Lima, E. L. (2004). Curso de Análise Vol 1. 11a edição. *Rio de Janeiro: IMPA*.

Orlich, D., Harder, R., Callahan, R., Kauchak, D., Pendergass, R., & Keogh, A. (1994). *Técnicas de Enseñanza. Modernización en el Aprendizaje*. Editorial Limusa.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. *International Handbook of Mathematics Education*, 51.